SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Y

DETERMINANTES

Prof. Esperanza Vélez, MS.

Departamento de Matemáticas

Universidad de Puerto Rico en Bayamón

PREPRUEBA

En cada ejercicio seleccione la respuesta correcta.

1) Una solución del sistema $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$ es

a) $(1,2,3)$

b) $(-1,2,3)$

c) $(1,-2,3)$

d) $(1,-2,-3)$

2) La matriz aumentada del sistema $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_2 = 1 \\ x_3 - x_2 = 2 - x_1 \\ x_2 + x_1 = x_3 - 5 \end{cases}$ es

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$

3) La representación matricial del sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$ es

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

4) El valor de la variable x_1 al resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$, es

a) -2

b) 2

c) 3

d) -3

5) El valor de la variable x_2 al resolver el sistema $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ es

a) -1

b) 2

c) 1

d) -2

6) Cuál de las siguientes matrices está en forma escalonada reducida?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

7) Si la matriz escalonada reducida de un sistema de ecuaciones lineales tiene la forma

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$, entonces el sistema

a) tiene solución única.

b) tiene infinitas soluciones.

c) no tiene solución.

d) no se puede determinar el tipo de solución.

8) Al evaluar el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$ se obtiene

a) 14

b) -14

c) 26

d) -26

9) Al evaluar el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ se obtiene

a) 45

b) 63

c) 51

d) -57

10) Si $(\det A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ y $(\det B) = \begin{vmatrix} 3 & (4+6) \\ -1 & (5+-2) \end{vmatrix}$ entonces

a) $(\det B) = (\det A) + 2$

b) $(\det B) = (\det A)$

c) $(\det B) = 2(\det A)$

d) $(\det B) = -(\det A)$

11) Al usar la Regla de Cramer para resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$, el valor de la variable x_1 se obtiene evaluando la expresión

a) $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}$

b) $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}$

c) $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}$

d) $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}$

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del módulo, el participante podrá:

1. resolver sistemas 2x2 usando el método de sustitución.

2. resolver sistemas 2x2 o 3x3, usando el método de eliminación.

3. escribir la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales.

4. escribir un sistema de ecuaciones lineales, a partir de su matriz aumentada.

5. identificar una matriz escalonada reducida.

6. resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales usando el método de Eliminación Gausiana.

7. identificar el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales, a partir de su matriz escalonada reducida.

8. conocer las propiedades de los determinantes.

9. evaluar un determinante de cualquier orden.

10. resolver un sistema 2x2 o 3x3, usando la regla de Cramer, en caso de que sea aplicable.

JUSTIFICACIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales y la teoría de determinantes constituyen un tópico de gran importancia en el campo de las matemáticas.

El desarrollo de la teoría de sistemas de ecuaciones lineales y determinantes ha recibido muchas contribuciones a través de la historia Uno de los métodos usado para resolver sistemas de ecuaciones, es el método de eliminación, el cual data de tiempos muy antiguos, pero fue organizado sistemáticamente por Karl Frederick Gauss y Camille Jordan. La teoría de matrices fue desarrollada por Arthur Cayley. El método de determinantes fue inventado por Takakazu Seki Kowa en 1683 en Japón y por Gottfried Wilhelm von Leibniz en 1693 en Alemania. La Regla de Cramer, recibió su nombre en honor al suizo Gabriel Cramer, quien popularizó el uso de determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Actualmente, debido a la gran cantidad de aplicaciones que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales, en diversos campos tales como economía, sociología, ecología, demografía, genética, electrónica, ingeniería, física, etc., la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es uno de los problemas más importantes en matemáticas. Usando los métodos de la matemática moderna, es posible reducir un problema de mucha complejidad, a un simple sistema de ecuaciones lineales.

También, los sistemas de ecuaciones lineales se usan como una herramienta en campos como el álgebra lineal, para facilitar la comprensión de otros conceptos abstractos.

El propósito de este trabajo es presentar la teoría básica de los sistemas de ecuaciones lineales y los métodos para resolverlos, como también la teoría básica de los determinantes, ya que ellos forman parte de la teoría de matrices y también son usados para resolver sistemas 2x2 y 3x3. La primera parte, Sistemas de ecuaciones lineales, contiene los sistemas 2x2 y 3x3, con su interpretación geométrica y sus métodos de resolución, el método de Gauss y el de Gauss-Jordan para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales, los sistemas lineales homogéneos y algunas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales. La segunda parte, Determinantes, contiene determinantes de orden 2 y de orden 3, propiedades de los determinantes, evaluación de determinantes de cualquier orden y algunas aplicaciones.

CONTENIDO

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

I. Generalidades – Sistemas 2x2 y 3x3.

Una **ecuación lineal** con n variables (o incógnitas) es una expresión que tiene la forma

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + \cdots + a_n\, x_n = b$$

en donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son constantes llamadas *coeficientes*; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son las *variables* (o incógnitas) y b es el *término constante*.

Si $b = 0$, la ecuación se llama *homogénea*.

Una **solución** de una ecuación lineal en n variables, es una *n-upla* ordenada $\left(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\right)$ de números, que satisface la ecuación. Es decir,

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + \cdots + a_n s_n = b$$

<u>*Ejemplo*</u>*:*

$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -16$ es una ecuación lineal en tres variables.

$\left(2, 8, -1\right)$ es una solución de la ecuación, ya que $5\left(2\right) - 3\left(8\right) + 2\left(-1\right) = -16$.

$\left(1, 5, -3\right)$ también es solución de la ecuación, ya que $5\left(1\right) - 3\left(5\right) + 2\left(-3\right) = -16$.

$\left(4, -8, 2\right)$ NO es solución de la ecuación, ya que $5\left(4\right) - 3\left(-8\right) + 2\left(2\right) = 48 \neq -16$.

Un **sistema** de m ecuaciones lineales con n variables es una expresión de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

en donde a_{ij} y b_i con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$ son números reales y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables.

Los términos $b_1, b_2, \ldots, b_m$ se llaman términos constantes.

Si los términos constantes son todos iguales a cero, entonces se dice que el **sistema** es **homogéneo**.

Nota: se usa la expresión *sistema* $m \times n$, para referirse a un sistema de m ecuaciones lineales con n variables.

Ejemplos:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$ es un sistema 2×2.

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$ es un sistema 2×3.

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ es un sistema 3×3 , homogéneo.

Una **solución de un sistema** $m \times n$, es una *n-upla* ordenada de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que satisface cada una de las ecuaciones del sistema; es decir, que es solución de cada una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

$(1, -2, 4)$ es una solución del sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$, ya que

$$\begin{cases} 2(1) + (-2) - (4) = -4 \\ (1) - 3(-2) + (4) = 11 \end{cases}$$

El **conjunto solución** de un sistema de ecuaciones lineales, está formado por todas las soluciones del sistema.

Dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes**, si tienen el mismo el mismo conjunto solución.

Ejemplo:

El conjunto solución del sistema $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -9 \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ es $\{(2, -3)\}$.

El conjunto solución del sistema $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -7 \\ -x_1 - 4x_2 = 10 \end{cases}$ es $\{(2,-3)\}$.

Por lo tanto, el sistema $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -9 \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ es equivalente al sistema $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -7 \\ -x_1 - 4x_2 = 10 \end{cases}$.

Un sistema de ecuaciones lineales es **consistente**, si tiene al menos una solución. En caso contrario, el sistema es **inconsistente.**

Teorema

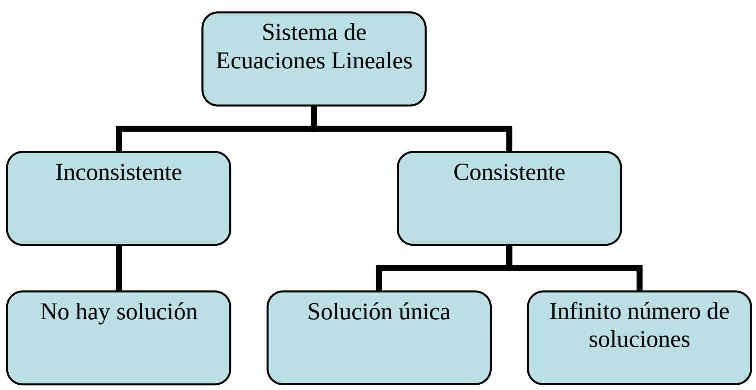
Para cualquier sistema de ecuaciones lineales, uno y sólo uno de los siguientes enunciados es cierto:

i) El sistema tiene sólo una solución.

ii) El sistema no tiene solución.

iii) El sistema tiene un número infinito de soluciones.

El enunciado del teorema anterior se puede expresar gráficamente por medio del siguiente diagrama.



`

Sistemas de dos Ecuaciones Lineales con dos Variables (Sistemas 2x2)

Son sistemas de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

en donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, son constantes y x_1, x_2 , son variables.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$$

Una **solución** de un sistema 2x2 es un par ordenado que satisface cada una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

$\left(\frac{11}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ es solución del sistema $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$, ya que

$$3\left(\frac{11}{5}\right) + 2\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{33}{5} - \frac{8}{5} = \frac{25}{5} = 5 \quad \text{y}$$

$$-\left(\frac{11}{5}\right) - 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{11}{5} + \frac{16}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Interpretación Geométrica de un Sistema 2x2

Cada ecuación del sistema representa una recta en el plano, y cada punto de la recta es una solución de la ecuación.

Por lo tanto, un sistema 2x2 representa dos rectas en el plano.

El par ordenado (x_1, x_2) será una solución del sistema si y sólo si el punto pertenece a ambas rectas.

Geométricamente, para un sistema 2x2, se puede presentar una de las siguientes tres situaciones:

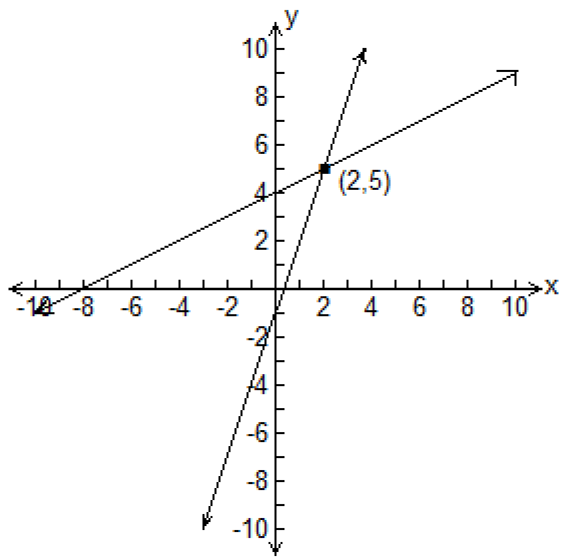
1. El sistema representa dos rectas que se intersectan en un solo punto. En este caso, la solución del sistema es el punto de intersección. El sistema tiene **solución única**.

Esto ocurre cuando los coeficientes de x_1 y x_2 no son proporcionales. Es decir,

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Ejemplo:

La representación geométrica del sistema $\begin{cases} 3x_1 - \ x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$ es



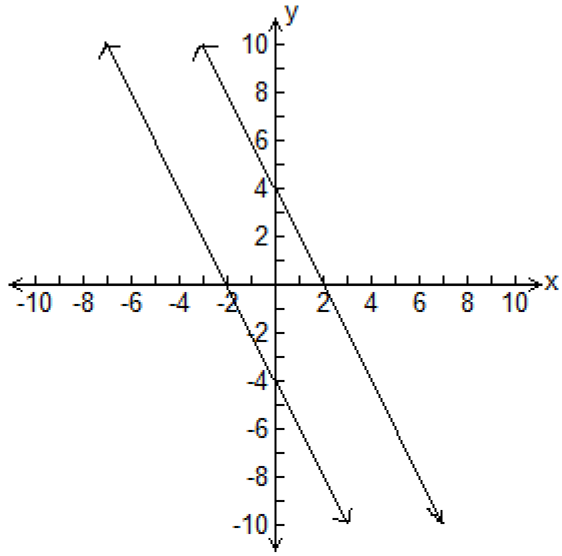
El punto $(2,5)$ pertenece a ambas rectas; es decir, es solución de cada una de las ecuaciones del sistema. Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $\{(2,5)\}$.

2. El sistema representa dos rectas paralelas. En este caso las dos rectas **no** tienen puntos en común, y por lo tanto el sistema **no tiene solución.** Es decir, el sistema es inconsistente.

Esto ocurre cuando los coeficientes de las variables son proporcionales entre si, pero no lo son con los términos constantes. Es decir, $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

Ejemplo:

La representación geométrica del sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = -4 \end{cases}$ es



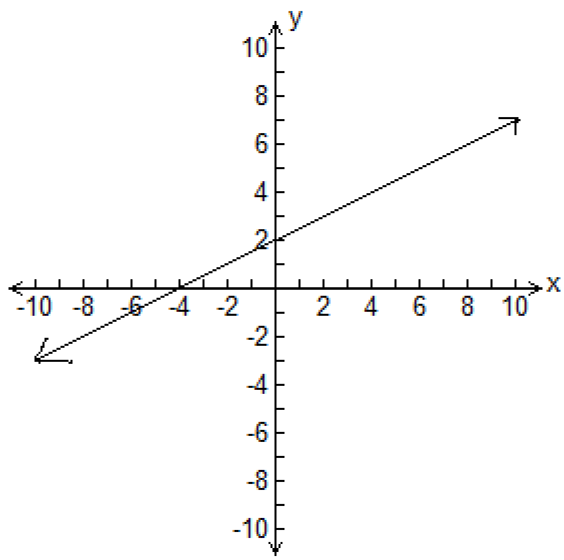
Las rectas son paralelas, no hay puntos de intersección, por lo tanto el sistema **no** tiene solución. El sistema es inconsistente.

3. El sistema representa dos rectas coincidentes. Una ecuación es múltiplo de la otra, es decir, las ecuaciones son *dependientes* y representan una misma recta. Cada punto de la recta es solución del sistema, por lo tanto el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Esto ocurre cuando los coeficientes y los términos constantes son proporcionales. Es decir, $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Ejemplo:

La representación geométrica del sistema $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - x_2 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ es



Las dos ecuaciones representan una misma recta, y cada punto de la recta es solución del sistema, por lo tanto el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Métodos Algebráicos para Resolver un Sistema 2x2

1. *Método de Sustitución*

Los pasos del método de sustitución se ilustrarán resolviendo el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$$

Paso 1

Se resuelve para una de las variables en términos de la otra variable, en una de las ecuaciones.

Eejemplo: se resuelve para x_2 en la primera ecuación.

$$x_2 = 5x_1 - 13$$

Paso 2

El resultado obtenido se sustituye en la otra ecuación, obteniendo así una ecuación lineal en una variable. Se resuelve para esa variable.

Ej: sustituimos $x_2 = 5x_1 - 13$ en la ecuación $2x_1 + 3x_2 = 12$

$$2x_1 + 3(5x_1 - 13) = 12$$

$$17x_1 - 39 = 12$$

$$17x_1 = 51$$

$$x_1 = 3$$

Paso 3:

El valor obtenido para la variable, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales, para hallar el valor de la otra variable.

Ej: sustituimos $x_1 = 3$ en la ecuación $x_2 = 5x_1 - 13$

$$x_2 = 5(3) - 13$$

$$x_2 = 2$$

El conjunto solución del sistema es $\{(3,2)\}$.

2. *Método de Eliminación*

El método consiste en sustituir el sistema original por un sistema equivalente en el cual al sumar las dos ecuaciones se elimine una de las variables.

Un sistema de ecuaciones equivalente se puede obtener al efectuar uno o varios de los siguientes pasos:

Paso 1

Intercambiar dos ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 4 \\ -x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$ es equivalente al sistema $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 = 5 \\ 5x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$

Paso 2

Multiplicar (o dividir) ambos lados de una ecuación por un mismo número distinto de cero.

Ejemplo:

Si en el sistema $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 4 \\ -x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$ se multiplica en ambos lados de la segunda ecuación por 5, se obtiene el sistema $\begin{cases} 5x_1 - \;\; 2x_2 = 4 \\ -5x_1 + 35x_2 = 25 \end{cases}$,que es equivalente al anterior.

Paso 3

Reemplazar una ecuación del sistema por la suma (o resta) de esa ecuación y un múltiplo distinto de cero de otra ecuación del sistema.

Ejemplo:

En el sistema $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 = 8 \end{cases}$, se va a multiplicar ambos lados de la primera ecuación por -3. Se obtiene $-3x_1 + 9x_2 = -21$.

Ahora se va a sustituir la segunda ecuación $3x_1 + 5x_2 = 8$, por la suma de ella con $-3x_1 + 9x_2 = -21$.

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 5x_2 = 8 \\ + -3x_1 + 9x_2 = -21 \\ \hline 14x_2 = -13 \end{array}$$

Se obtiene el sistema $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ \quad 14x_2 = -13 \end{cases}$, el cual es equivalente al sistema inicial.

Ejemplo:

Resolver cada uno de los siguientes sistemas por el método de eliminación.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = \dfrac{2}{3} \\ 3x_1 - 5x_2 == -10 \end{cases}$

Solución

Se busca obtener dos términos opuestos en una de las variables. Si escogemos por ejemplo la variable x_1, se debe buscar el *mínimo común múltiplo* de los coeficientes de x_1. En nuestro caso, el mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6.

Se multiplica cada ecuación por el número adecuado, de tal forma que el coeficiente de x_1 en una de las ecuaciones sea 6 y en la otra sea -6.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = \dfrac{2}{3} & (\textit{multiplicamos por } -3) \\ 3x_1 - 5x_2 = -10 & (\textit{multiplicamos por } 2) \end{cases}$$

Se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} -6x_1 - 12x_2 = -2 \\ \ \ 6x_1 - 10x_2 = -20 \end{cases}$$

Se suman las dos ecuaciones del sistema para obtener una ecuación en una variable. Se resuelve para la variable.

$$\begin{array}{rr} & -6x_1 - 12x_2 = -2 \\ + & 6x_1 - 10x_2 = -20 \\ \hline & -22x_2 = -22 \end{array}$$

$$x_2 = 1$$

Se sustituye el valor obtenido para la variable en cualquiera de las ecuaciones iniciales, para obtener el valor de la otra variable.

Por ejemplo, sustituimos $x_2 = 1$ en $3x_1 - 5x_2 = -10$.

$$3x_1 - 5(1) = -10$$

$$3x_1 = -5$$

$$x_1 = -\frac{5}{3}$$

El conjunto solución del sistema es $\left\{\left(-\dfrac{5}{3}, 1\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \ \ x_2 = -2 \\ \ \ x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$

Si se quiere eliminar a x_2, se debe multiplicar la primera ecuación por 2, para obtener el siguiente sistema equivalente al anterior.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4 \\ x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Se suman las dos ecuaciones del sistema para obtener una ecuación en una variable. Se resuelve para la variable.

$$\begin{array}{rr} & x_1 + 2x_2 = -4 \\ + & x_1 - 2x_2 = 8 \\ \hline & 2x_1 = 4 \end{array}$$

$$x_1 = 2$$

Se sustituye el valor de x_1 en cualquiera de las ecuaciones iniciales, para hallar el valor de x_2.

Sustituimos $x_1 = 2$ en $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = -2$.

$$\frac{1}{2}(2) + x_2 = -2$$

$$1 + x_2 = -2$$

$$x_2 = -3$$

El conjunto solución del sistema es $\{(2,-3)\}$.

<u>*Ejemplo:*</u> *(Sistema 2x2 Inconsistente)*

Resolver el sistema $\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$

Solución

Usando el método de sustitución, se resuelve para x_1 en la primera ecuación.

$$x_1 = 3 - 2x_2$$

Se sustituye esta expresión en la segunda ecuación.

$$2(3-2x_2)+4x_2 = 5$$

$$6-4x_2+4x_2 = 5$$

$$6 = 5$$

Se obtiene una ecuación que es falsa, lo cual significa que el sistema **no** tiene solución y por lo tanto es inconsistente.

<u>*Ejemplo:*</u> *(Sistema 2x2 con un número infinito de soluciones)*

Resolver el sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 = -8 \end{cases}$

Solución

Usando el método de sustitución, se resuelve para x_1 en la primera ecuación.

$$x_1 = 4 + 2x_2$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación, se obtiene

$$-2(4+2x_2)+4x_2 = -8$$

$$-8-4x_2+4x_2 = -8$$

$$0 = 0$$

Se llega a la igualdad $0 = 0$, lo cual significa que las dos ecuaciones del sistema son dependientes (una es múltiplo de la otra), es decir, que el sistema es equivalente a un sistema de una sola ecuación.

Todos los pares ordenados (x_1, x_2) que satisfagan la ecuación, son soluciones del sistema.

Para expresar las infinitas soluciones del sistema, se resuelve para una de las variables en la ecuación.

$$x_1 = 2x_2 + 4 \qquad \text{o} \qquad x_2 = \frac{1}{2}x_1 - 2$$

El conjunto solución se puede escribir como

$$\left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, x_1 = 2t + 4 \,,\, x_2 = t,\ en\ donde\ \ t\ \ es\ \ cualquier\ \ número\ \ real\right\}$$ o,

$$\left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, x_2 = \frac{1}{2}t - 2,\ donde\ \ t\ \ es\ \ cualquier\ \ número\ \ real\right\}$$

Una solución particular se obtiene asignando un valor real arbitrario a la variable que toma sus valores en el conjunto de los reales.

Por ejemplo, en el primer caso, si se asigna $t = 0$, entonces $x_1 = 4$, y se obtiene el par ordenado $(4, 0)$ que es una solución particular.

Sistemas de Tres Ecuaciones Lineales con tres Variables **(*Sistemas 3x3*)**

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables x_1, x_2, x_3, tiene la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

en donde a_{ij}, b_i, con $i\,,\, j = 1, 2, 3$, son constantes.

<u>Ejemplo:</u>

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 6 \\ \ \ x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -16 \end{cases}$$

Una **solución** de un sistema 3x3 es una terna ordenada (s_1, s_2, s_3) que satisface cada una de las tres ecuaciones del sistema.

<u>Ejemplo:</u>

La terna $(-1, -2, 5)$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 6 \\ \ \ x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -16 \end{cases}$, ya que

$$2(-1) + (-2) + 2(5) = 6$$

$$(-1) - 3(-2) - (5) = 0$$

$$-3(-1) + 2(-2) - 3(5) = -16$$

Interpretación Geométrica de un Sistema 3x3

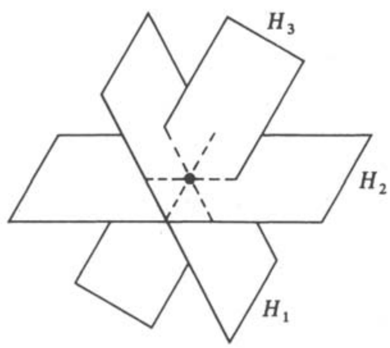
Cada ecuación del sistema representa un plano en el espacio, y cada punto del plano es una solución de la ecuación.

Por lo tanto, un sistema 3x3 representa tres planos en el espacio.

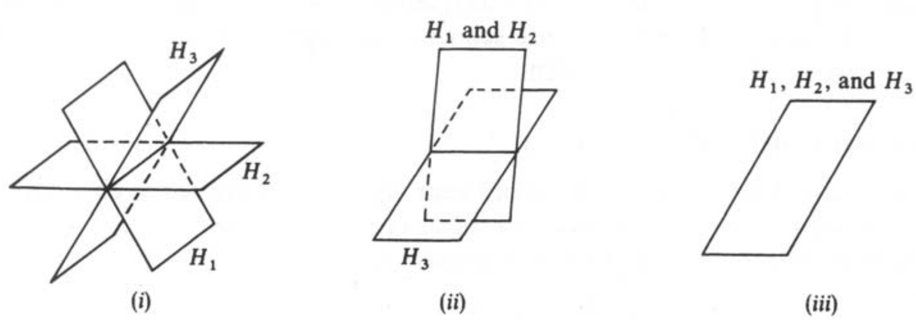
Una terna ordenada (s_1, s_2, s_3) será una solución del sistema si y sólo si el punto (en el espacio tridimensional) representado por ella pertenece a cada uno de los tres planos.

Geométricamente, si se denota por H_1, H_2 y H_3 a los tres planos cuyas ecuaciones forman un sistema 3x3 cualquiera, entonces, ocurre una de las siguientes tres situaciones:

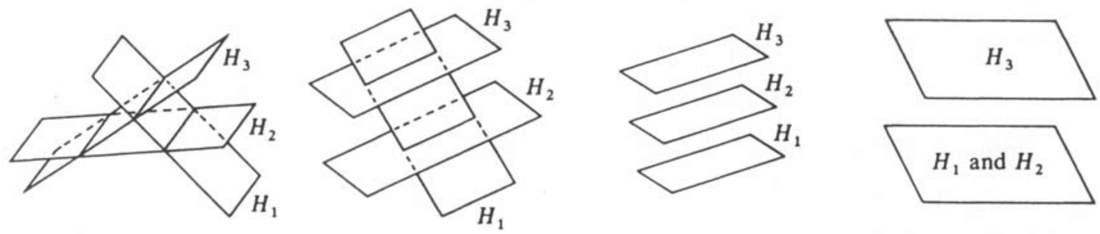
1. Que los tres planos se intersecten en un solo punto, y en este caso el sistema tiene una sola solución.



2. Que el sistema tenga ecuaciones dependientes. En este caso hay un número infinito de soluciones. Geométricamente, la intersección de los tres planos es una recta, o los tres planos son coincidentes (es decir, que el sistema representa un solo plano).



3. Que no haya puntos que pertenezcan simultáneamente a los tres planos. En este caso el sistema es inconsistente.



(*i*) (*ii*) (*iii*) (*iv*)

Método algebráico para resolver un sistema 3x3

Para ilustrar este método, se va a resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 = 0 & (1) \\ -2x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = -7 & (2) \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 7 & (3) \end{cases}$

en el cual se han enumerado las ecuaciones, para una mejor organización.

Paso 1

Se elimina una de las variables del sistema usando distintos pares de ecuaciones, hasta obtener un sistema 2x2.

Ejemplo: en el sistema dado, se va a eliminar x_2.

Se multiplica la ecuación (1) por -2 y la ecuación que se obtenga se suma con la ecuación (2).

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \qquad (\times \ \ -2)$$

se obtiene

$$-4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$$

Se suma esta ecuación con la ecuación (2), para obtener la ecuación (4)

$$\begin{array}{rl} & -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ + & -2x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = -7 \\ \hline & -6x_1 + 7x_3 = -7 \qquad (4) \end{array}$$

Ahora se multiplica la ecuación (1) por 4 y la ecuación que se obtenga se suma con la ecuación (3).

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \qquad (\times \quad 4)$$

se obtiene

$$8x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 0$$

Se suma esta ecuación con la ecuación (3), para obtener la ecuación (5).

$$\begin{array}{rl} & 8x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 0 \\ + & 3x_1 - 4x_2 - \ \ 3x_3 = 7 \\ \hline & \qquad 11x_1 - 15x_3 = 7 \qquad (5) \end{array}$$

De las ecuaciones (4) y (5) se obtiene el siguiente sistema 2x2.

$$\begin{cases} -6x_1 + 7x_3 = -7 & (4) \\ 11x_1 - 15x_3 = 7 & (5) \end{cases}$$

<u>Paso 2</u>

Se resuelve el sistema 2x2 que se obtenga, para hallar los valores de dos de las variables.

<u>Ejemplo</u>: en este ejemplo, al resolver el sistema 2x2, se obtienen las soluciones

$$x_1 = \frac{56}{13} \qquad y \qquad x_3 = \frac{35}{13}$$

<u>Paso 3</u>

Las soluciones obtenidas al resolver el sistema 2x2, se sustituyen en cualquier de las ecuaciones originales del sistema, para hallar el valor de la otra variable.

<u>Ejemplo</u>: en este ejemplo, se va a sustituir $x_1 = \frac{56}{13}$ y $x_3 = \frac{35}{13}$ en la ecuación (1).

$$2\left(\frac{56}{13}\right) + x_2 - 3\left(\frac{35}{13}\right) = 0$$

$$x_2 = -\frac{112}{13} + \frac{105}{13}$$

$$x_2 = -\frac{7}{13}$$

El conjunto solución del sistema es $\left\{\left(\frac{56}{13}, -\frac{7}{13}, \frac{35}{13}\right)\right\}$.

Ejemplo: (*Sistema 3x3 con un parámetro y un número infinito de soluciones*)

Resolver el sistema $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 0 & (1) \\ 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 & (3) \end{cases}$

Solución

Se va a eliminar la variable x_2.

Se suman las ecuaciones (1) y (2), para obtener la ecuación (4).

$$\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ + \quad 2x_1 + x_2 - \ \ x_3 = 0 \\ \hline 3x_1 + x_3 = 0 \end{array} \qquad (4)$$

Ahora se multiplica la ecuación (1) por 2 y la ecuación resultante se suma con la ecuación (3), para obtener la ecuación (5).

$$\begin{array}{r} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ + \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \hline 3x_1 + x_3 = 0 \end{array} \qquad (5)$$

El sistema $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0 & (4) \\ 3x_1 + x_3 = 0 & (5) \end{cases}$, representa una sola ecuación, lo cual indica que el sistema tiene infinitas soluciones.

En la ecuación $3x_1 + x_3 = 0$, se resuelve para x_1, obteniendo

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_3$$

Esta expresión se sustituye en la ecuación (1) y se resuelve para x_2.

$$-\frac{1}{3}x_3 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{5}{3}x_3$$

Se hace $x_3 = t$, donde t es cualquier número real.

El conjunto solución del sistema, el cual contiene infinitas soluciones está dado por

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| \; x_1 = -\frac{1}{3}t \;,\; x_2 = \frac{5}{3}t \;,\; x_3 = t \;;\; t \textit{ es cualquier número real.} \right\}.$$

<u>*Ejemplo:*</u> (*Sistema 3x3 con dos parámetros y un número infinito de soluciones*)

Resolver el sistema
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - \;\; x_3 = 3 & (1) \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 & (2) \\ -x_1 - \;\; x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = -\dfrac{3}{2} & (3) \end{cases}$$

Solución

Se va a eliminar la variable x_3.

Se multiplica la ecuación (1) por -2 y la ecuación resultante se suma con la ecuación (2).

$$\begin{array}{rl} & -4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -6 \\ + & \;\;\; 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ \hline & 0 = 0 \end{array}$$

Esto significa que las ecuaciones (1) y (2) representan una sola ecuación.

Ahora se multiplica la ecuación (1) por $\dfrac{1}{2}$ y la ecuación resultante se suma con la ecuación (3).

$$\begin{array}{rl} & x_1 + x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = \dfrac{3}{2} \\ + & -x_1 - x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = -\dfrac{3}{2} \\ \hline & 0 = 0 \end{array}$$

Nuevamente, las ecuaciones (1) y (3) representan una sola ecuación.

El sistema es equivalente a un sistema de una sola ecuación y por lo tanto tiene un número infinito de soluciones.

Se resuelve para x_1 en la ecuación (1).

$$x_1 = -x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}$$

El conjunto solución del sistema es

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| \; x_1 = -r + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \;\; , x_2 = r \;\; , x_3 = t \;\; ; \; donde \;\; r \;\; y \;\; t \; son \; n\acute{u}meros \; reales \right\}$$

Ejemplos de Aplicación:

1. Una prescripción médica requiere ingerir 40 mg (miligramos) de vitamina C y 30 mg de vitamina D , diariamente. La farmacia proveedora tiene dos tipos de líquidos que pueden ser usados: el líquido A contiene 20% de vitamina C y 30% de vitamina D y el líquido B contiene 40% de vitamina C y 20% de vitamina D. ¿ Cuántos miligramos de cada tipo de líquido deben ser usados para cumplir con la prescripción médica?.

Solución

La información del problema se puede representar en la siguiente tabla:

	Porciento en liquido A	*Porciento en liquido B*	*Total requerido*
Vitamina C	0.20	0.40	$40mg$
Vitamina D	0.30	0.20	$30mg$

Sean

$x_1 =$ cantidad de miligramos del líquido A que serán usados.

$x_2 =$ cantidad de miligramos del líquido B que serán usados.

Se genera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0.20x_1 + 0.40x_2 = 40 & (1) \\ 0.30x_1 + 0.20x_2 = 30 & (2) \end{cases}$$

En donde la primera ecuación representa cómo obtener la cantidad requerida de vitamina C y la segunda ecuación representa cómo obtener la cantidad requerida de vitamina D.

Se va a resolver el sistema por eliminación.

Se multiplica la ecuación (2) por -2 y la ecuación resultante se suma con la ecuación (1).

$$\begin{array}{rr} & 0.20x_1+0.40x_2=40 \\ + & -0.60x_1-0.40x_2=-60 \\ \hline & -0.40x_1=-20 \end{array}$$

$$x_1=50$$

Ahora se sustituye $x_1=50$ en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema. Por ejemplo, sustituimos en la ecuación (1).

$$0.20(50)+0.40x_2=40$$

$$0.40x_2=30$$

$$x_2=75$$

Por lo tanto, para que la farmacia pueda cumplir con la prescripción médica se requiere que use 50 mg del líquido A y 75 mg del líquido B.

2. Hallar una función $y=ax^2+bx+c$ que contenga a los puntos $(-1,-2)$, $(1,-4)$ y $(2,4)$.

Solución

Las coordenadas de cada punto deben satisfacer la ecuación $y=ax^2+bx+c$.

Para el punto $(-1,-2)$ es cierto que $-2=a(-1)^2+b(-1)+c$.

Para el punto $(1,-4)$ es cierto que $-4=a(1)^2+b(1)+c$.

Para el punto $(2,4)$ es cierto que $4=a(2)^2+b(2)+c$.

Se genera entonces el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a-b+c=-2 & (1) \\ a+b+c=-4 & (2) \\ 4a+2b+c=4 & (3) \end{cases}$$

Se multiplica la ecuación (1) por -1 y la ecuación resultante se suma con la ecuación (2), para obtener la ecuación (4).

$$\begin{array}{r} -a+b-c=2 \\ +\quad a+b+c=-4 \\ \hline 2b=-2 \end{array}$$

$$b=-1 \qquad (4)$$

Ahora se multiplica la ecuación (1) por -1 y la ecuación resultante se suma con la ecuación (3), para obtener la ecuación (5).

$$\begin{array}{r} -a+\ \ b-c=2 \\ +\quad 4a+2b+c=4 \\ \hline 3a+3b=6 \end{array}$$

$$a+b=2 \qquad (5)$$

Ahora se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (4) y (5).

$$\begin{cases} b=-1 & (4) \\ a+b=2 & (5) \end{cases}$$

Sustituyendo (4) en (5), se obtiene

$$a+(-1)=2$$

$$a=3$$

Se sustituye $a=3$ y $b=-1$ en la ecuación (1)

$$(3)-(-1)+c=-2$$

$$c=-6$$

Por lo tanto, la función buscada es $y=3x^2-x-6$.

EJERCICIOS – PARTE I

1) Determinar si los valores asignados a las variables constituyen una solución del sistema.

a) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, para el sistema $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$

b) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, para el sistema $\begin{cases} 4x_1 \qquad - 5x_3 = 6 \\ \qquad 5x_2 - x_3 = -17 \\ -x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 24 \end{cases}$

2) Resolver cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = -9 \\ 4x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 = -4 \\ 11x_1 - 13x_2 = -48 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 1 = 2(x_2 + 6) \\ x_1 + 6 = 3(1 - 2x_2) \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x_1 + 5) = 4(x_2 - 4x_1) \\ 10(x_2 - x_1) = 11x_2 - 12x_1 \end{cases}$

3) Resolver cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -7 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -8 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$

4) Hallar números reales a , b y c , de tal forma que la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ contenga los puntos $(-1,4)$, $(2,3)$ y $(0,1)$.

5) Un gerente de un restaurante desea comprar 200 cajas de platos. Una caja del diseño *A*, cuesta \$ 25, mientras que una caja del diseño *B* cuesta \$ 45. El gerente tiene disponibles \$ 7,400 para este propósito. ¿Cuántas cajas de cada diseño debe ordenar?

6) Si al numerador y al denominador de una fracción se suma uno, el valor de la fracción es $\frac{2}{3}$, y si al numerador y al denominador se le resta uno, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción.

7) Una persona tiene \$120 en 33 billetes de \$5 y de \$2. ¿ Cuántos billetes de \$5 y cuántos de \$2 hay?.

II. Métodos de Eliminación Gaussiana para Resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales

<u>Matriz Aumentada de un Sistema de Ecuaciones Lineales</u>

Para un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones lineales con n variables

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

La **matiz aumentada** del sistema es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

en donde

A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ es la matriz de los coeficientes, y **b**=$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ es el vector columna de los términos constantes.

Si se denota **x**= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ al vector columna de las variables, entonces el sistema $m \times n$ de ecuaciones lineales puede representarse matricialmente por

$$\mathbf{Ax=b}$$

Ejemplos:

1. Escribir la matriz aumentada del sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 17 \end{cases}$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

2. Dada la siguiente matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$, escribir el correspondiente sistema de ecuaciones lineales.

Solución

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Operaciones Elementales sobre las Filas de una Matriz

Hay tres tipos de operaciones que se pueden realizar sobre las filas de una matriz, llamadas *operaciones elementales*. Estos tipos de operaciones son:

Operaciones Elementales de Tipo I

Intercambiar dos filas de una matriz. Se denota por $F_i \leftrightarrow F_j$, lo cual significa intercambiar la fila i y la fila j.

Es decir, la fila i pasa al lugar de la fila j, y viceversa.

Ejemplo:

$$\text{Dada } A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 8 & 4\end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 8 & 4\end{bmatrix} \quad F_2 \leftrightarrow F_3 \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 8 & 4\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

Operaciones Elementales de Tipo II

Multiplicar cada elemento de una fila por un escalar $k \neq 0$. Se denota por

$kF_i \rightarrow F_i \quad (k \neq 0)$

Significa que cada elemento de la fila i se multiplica por $k \neq 0$ y esta nueva fila sustituye a la fila i.

Ejemplo:

Si sobre la matriz $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 8 & 4\end{bmatrix}$ se va a hacer $-2F_1 \rightarrow F_1$, la nueva F_1 será

$$F_1 \rightarrow \quad (-2)(1) \quad (-2)(2) \quad (-2)(-1)$$

$$F_1 \rightarrow \quad -2 \quad -4 \quad 2$$

y la matriz que se obtiene es $\begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 8 & 4\end{bmatrix}$.

Operaciones Elementales de Tipo III

Sumar k veces la fila i a la fila j. Se denota por $(kF_i + F_j) \rightarrow F_j$, para $k \neq 0$. Significa que cada elemento de la fila i se multiplica por k y este producto se suma al correspondiente elemento de la fila j. La fila que cambia es F_j.

Ejemplo:

Si sobre $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ se va a hacer $(-3F_1 + F_3) \to F_3$, el proceso es

$$\begin{array}{rrrr} -3F_1 \to & -3 & -6 & 3 \\ +F_3 \to & 3 & 8 & 4 \\ \hline & 0 & 2 & 7 \end{array}$$

La nueva fila será $F_3 \to \quad 0 \quad 2 \quad 7$, y la matriz que se obtiene es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Forma Escalonada de una Matriz

Una matriz está en forma escalonada si cumple las siguientes tres condiciones:

1. La primera entrada distinta de cero en cada fila distinta de cero es 1.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

2. Si los elementos de la fila k y de la fila $k+1$ no son todos iguales a cero, entonces la primera entrada distinta de cero de la fila $k+1$ debe estar a la derecha de la primera entrada distinta de cero de la fila k.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} Fila \quad k \quad \to \\ Fila \quad k+1 \to \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Las filas cuyos elementos sean todos iguales a cero, deben estar debajo de las filas cuyos elementos <u>no</u> son todos iguales a cero.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

1. Las siguientes matrices están en forma escalonada

a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Explique por qué cada una de las siguientes matrices *no* está en forma escalonada.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

a. El primer elemento distinto de cero en la fila 2 no es 1.

b. La primera fila cuyos elementos son todos ceros, debería ser la última fila de la matriz.

c. El primer elemento distinto de cero de la segunda fila *no* está a la derecha del primer elemento distinto de cero de la primera fila.

Teorema

Cualquier matriz $A_{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada.

Nota

Del teorema anterior se deduce que si a una matriz $A_{m\times n}$ se le hacen una serie de operaciones elementales entre sus filas, para transformarla en una matriz en forma escalonada, entonces, la matriz escalonada que se obtenga es equivalente por filas a la matriz inicial A.

Definición

El proceso de transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro cuya matriz aumentada esté en forma escalonada, se llama **Eliminación Gausiana**.

Ejemplo:

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 10x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 10x_3 + 14x_4 = 6 \end{cases}$ por el método de Eliminación Gausiana.

Solución

Primero se escribe la matriz aumentada del sistema, la cual va a ser transformada mediante operaciones elementales sobre sus filas en una matriz en forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \end{array}\right]$$

El primer elemento distinto de cero de la primera fila debe ser 1. Para conseguir ese 1, se multiplica la primera fila por $\frac{1}{2}$, es decir, se hace la operación elemental $\frac{1}{2}F_1$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}F_1 \to F_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \end{array}\right]$$

Los elementos por debajo del 1 que se obtuvo como primer elemento de la primera fila, deben ser ser ceros. Estos ceros se van a obtener, usando la primera fila para hacer las siguientes operaciones elementales: $(-F_1 + F_2) \to F_2$, $(-2F_1 + F_3) \to F_3$ y $(-4F_1 + F_4) \to F_4$.

$$\begin{array}{rrrrr|r} -F_1 \to & -1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ +F_2 \to & 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ \hline & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rrrrr|r} -2F_1 \to & -2 & -4 & 6 & -10 & -2 \\ +F_3 \to & 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ \hline & 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|r} -4F_1 \to & -4 & -8 & 12 & -20 & -4 \\ +F_4 \to & 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \\ \hline & 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}$$

entonces

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (-F_1+F_2)\to F_2 \\ (-2F_1+F_3)\to F_3 \\ (-4F_1+F_4)\to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right]$$

En la última matriz obtenida, el primer elemento distinto de cero de la segunda fila debe ser 1, y se va a conseguir haciendo $-F_2 \to F_2$.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right] \quad -F_2 \to F_2 \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right]$$

Los elementos por debajo del 1 que se acaba de obtener, deben ser iguales a cero. Estos ceros se van a conseguir usando la segunda fila para hacer sobre la última matriz, las siguientes operaciones elementales: $(-3F_2+F_3)\to F_3$ y $(-F_2+F_4)\to F_4$.

$$\begin{array}{rrrrr|r} -3F_2 \to & 0 & -3 & 3 & 6 & 9 \\ +F_3 \to & 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rrrrr|r} -F_2 \to & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ +F_4 \to & 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \\ \hline & 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}$$

es decir,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (-3F_2+F_3)\to F_3 \\ (-F_2+F_4)\to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

En la última matriz, el primer elemento distinto de cero de la tercera fila debe ser 1, y se va a conseguir haciendo $\frac{1}{2}F_3 \to F_3$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}F_3 \to F_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

El elemento debajo del 1 que se acaba de conseguir, debe ser igual a cero. Este cero se va a obtener haciendo $(-3F_3 + F_4) \to F_4$.

$$\begin{array}{rcccc|c} -3F_3 \to & 0 & 0 & -3 & -\frac{9}{2} & -\frac{27}{2} \\ +F_4 \to & 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{17}{2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \quad (-3F_3 + F_4) \to F_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{17}{2} \end{array}\right]$$

Por último, el primer elemento distinto de cero en la cuarta fila debe ser 1. Este 1 se consigue haciendo $-\frac{2}{17}F_4 \to F_4$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{17}{2} \end{array}\right] \quad -\frac{2}{17}F_4 \to F_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ es escalonada y el sistema de ecuaciones lineales

representado por ella es , el cual es equivalente al sistema de ecuaciones lineales inicial, es

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 & (1) \\ \quad x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 & (2) \\ \quad\quad x_3 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{9}{2} & (3) \\ \quad\quad\quad x_4 = 1 & (4) \end{cases}$$

Se sustituye $x_4 = 1$ en la ecuación (3)

$$x_3 + \frac{3}{2}(1) = \frac{9}{2}$$

$$x_3 = 3$$

Se sustituyen $x_4 = 1$ y $x_3 = 3$ en la ecuación (2)

$$x_2 - (3) - 2(1) = -3$$

$$x_2 = 2$$

Por último, se sustituyen $x_4 = 1$, $x_3 = 3$ y $x_2 = 2$ en la ecuación (1)

$$x_1 + 2(2) - 3(3) + 5(1) = 1$$

$$x_1 = 1$$

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $\{(1, 2, 3, 1)\}$.

Forma Escalonada Reducida de una Matriz

Una matriz está en forma escalonada reducida si cumple las siguientes condiciones:

1. La matriz está en forma escalonada.
2. El primer elemento distinto de cero en cada fila es el único elemento distinto de cero en su correspondiente columna.

Ejemplo:

Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Definición

El proceso de transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro cuya matriz aumentada esté en forma escalonada reducida, se llama **Proceso de Eliminación de Gauss-Jordan**.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$, usando el método de eliminación de Gauus-Jordan.

Solución

La matriz aumentada del sistema es $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 5 & 17 \end{array}\right]$.

El primer elemento distinto de cero de la primera fila debe ser 1 y todos los demás elementos de la primera columna deben ser ceros.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 5 & 17 \end{array}\right] \quad -F_1 \to F_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 5 & 17 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (2F_1+F_2) \to F_2 \\ (-3F_1+F_3) \to F_3 \\ (3F_1+F_4) \to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 11 \\ 0 & 2 & 8 & 11 \end{array}\right]$$

El primer elemento distinto de cero en la segunda fila debe ser 1 y todos los demás elementos de la segunda columna deben ser ceros.

$$-\frac{1}{2}F_2 \to F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 11 \\ 0 & 2 & 8 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (2F_2+F_1) \to F_1 \\ (-8F_2+F_3) \to F_3 \\ (-2F_2+F_4) \to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right]$$

El primer elemento distinto de cero en la tercera fila debe ser 1 y todos los demás elementos de la tercera columna deben ser ceros.

$$\frac{1}{11}F_3 \to F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (2F_3+F_1) \to F_1 \\ \left(\frac{3}{2}F_3+F_2\right) \to F_2 \\ (-11F_3+F_4) \to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz está en forma escalonada reducida y de ella se obtiene que

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad y \quad x_3 = 1$$

El conjunto solución del sistema es $\left\{\left(0\,,\frac{3}{2}\,,1\right)\right\}$.

Análisis de Soluciones para un Sistema de m Ecuaciones Lineales con n Variables

Sea un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$, el cual se va a resolver usando el proceso de eliminación de Gauss-Jordan.

Sea r el número de filas distintas de cero en la forma escalonada reducida (o escalonada) de la matriz de los coeficientes. Este número r es llamado el *rango* de la matriz. Entonces

1. Si $r = n$, al hacer que la matriz ampliada del sistema llegue a su forma escalonada reducida, la matriz de los coeficientes se transforma en la matriz identidad. El sistema tiene solución única y la forma de la matriz escalonada reducida es

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n \end{array}\right]$$

Ejemplo:

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 12 \end{array}\right] \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 12 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (-2F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-3F_1 + F_3) \to F_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} (-2F_2 + F_1) \to F_1 \\ (2F_2 + F_3) \to F_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (-3F_3 + F_1) \to F_1 \\ (2F_3 + F_2) \to F_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz de los coeficientes fue reducida a la matriz identidad, por lo tanto el sistema tiene solución única. El sistema representado por la última matriz conduce a la solución del sistema.

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

2. Si $r < n$, al hacer que la matriz ampliada del sistema llegue a su forma escalonada reducida, la matriz de los coeficientes **no** se logra transformar en la matriz identidad.Se obtienen menos ecuaciones que variables y el sistema tiene infinitas soluciones. La forma de la matriz escalonada reducida es

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rp} & d_r \end{array}\right]$$

donde $p = n - r \geq 1$.

Hay $n - r$ variables libres, es decir, variables que pueden tomar cualquier valor real.

<u>*Ejemplo:*</u>

Resolver cada sistema:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4 \\ 5x_1 + 8x_2 + 19x_3 = 11 \end{cases}$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 8 & 19 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-5F_1 + F_3) \to F_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right]$$

$$-F_2 \to F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2F_2 + F_1) \to F_1 \\ (2F_2 + F_3) \to F_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se acaba de obtener una fila de ceros y no es posible transformar la matriz de los coeficientes en la matriz identidad.

En este caso, $r = 2 < 3 = n$; $n - r = 1$, por lo tanto hay una variable libre. El sistema representado por la última matriz es

$$x_1 + 7x_3 = -1$$

$$x_2 - 2x_3 = 2$$

x_3 es una variable libre. Se hace $x_3 = t$, en donde t toma cualquier valor real. El conjunto solución del sistema es

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| \, x_1 = -1 - 7t \, , \, x_2 = 2 + 2t \, , \, x_3 = t \, , \, donde \;\; t \;\; es \; cualquier \; n\acute{u}mero \; real. \right\}$$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 20x_4 = 16 \\ 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 6 \end{cases}$

Solución

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 20 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right] \quad (-2F_1 + F_3) \to F_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (-2F_2 + F_1) \to F_1 \\ (-2F_2 + F_4) \to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se obtuvieron dos filas de ceros. En este caso, $r = 2 < 4 = n$; $n - r = 2$, por lo tanto hay dos variables libres. El sistema representado por la última matriz es

$$x_1 + 4x_4 = 2$$

$$x_2 + x_3 + 3x_4 = 3$$

x_3 y x_4 son variables libres. Se hace $x_3 = t$ y $x_4 = s$, en donde t y s pueden tomar cualquier valor real. El conjunto solución del sistema es

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, x_1 = 2 - 4s \, , \, x_2 = 3 - t - 3s \, , \, x_3 = t \, , \, x_4 = s \; en \; donde \;\; t \;\; y \;\; s \;\; toman \; cualquier \; valor \; real. \right\}$$

3. Si la matriz escalonada reducida tiene una fila que represente una ecuación en la cual los coeficientes de las variables son todos iguales a cero y el término constante es distinto de cero, entonces el sistema *no* tiene solución. Es decir, el sistema es inconsistente. La forma de la matriz escalonada reducida es

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

<u>*Ejemplo:*</u>

Resolver el sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 13x_3 = 8 \end{cases}$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & 7 \\ 3 & -4 & 13 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-3F_1 + F_3) \to F_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2F_2 + F_1) \to F_1 \\ (-2F_2 + F_3) \to F_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

La última fila de la matriz escalonada reducida representa la ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -4$$

es decir, $0 = -4$ lo cual es una contradicción. Esto significa que el sistema es inconsistente y por lo tanto no tiene solución.

<u>*Nota*</u>

1. *Sistemas Sobredeterminados*

Se llama *sistema sobredeterminado* a un sistema en el cual el número m de ecuaciones es mayor que el número n de variables. Los sistemas sobredeterminados pueden ser consistentes o inconsistentes. Si un sistema sobredeterminado es consistente, puede tener solución única o infinitas soluciones.

2. *Sistemas Subdeterminados*

Se llama *sistema subdeterminado* a un sistema $m \times n$ en el cual el número m de ecuaciones es menor que el número n de variables. Los sistemas subdeterminados pueden ser consistentes o inconsistentes. Si un sistema subdeterminado es consistente, entonces tiene infinitas soluciones. Un sistema subdeterminado **no** puede tener solución única, ya que la matriz aumentada del sistema llega a su forma escalonada reducida en un número r de pasos tal que $r \leq m < n$. Por lo tanto $n - r \geq 1$, es decir, el sistema tiene $n - r$ variables libres, lo cual conduce a infinitas soluciones.

Otros Ejemplos de Aplicación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

1) Una firma produce tres clases de artículos *A, B* , y *C* que requieren ser procesados por tres máquinas I , II y *III*. El tiempo requerido en horas para procesar una unidad de cada producto en las tres máquinas está dado por la siguiente tabla:

	A	B	C
I	3	1	2
II	1	2	1
III	2	4	1

La máquina I está disponible por 490 horas, la máquina II por 310 horas y la máquina III por 560 horas. ¿ Cuántas unidades de cada artículo se deben producir, si se quiere usar todo el tiempo que las máquinas tienen disponible?.

Solución

Sean

$x_1 =$ número de unidades del artículo A que se deben producir.

$x_2 =$ número de unidades del artículo B que se deben producir.

$x_3 =$ número de unidades del artículo C que se deben producir.

El tiempo que se usará la máquina I está dado por la ecuación $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 490$.

El tiempo que se usará la máquina II está dado por la ecuación $x_1 + 2x_2 + x_3 = 310$.

El tiempo que se usará la máquina III está dado por la ecuación $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 560$.

Se debe resolver el sistema $\begin{cases} 3x_1 + \quad x_2 + 2x_3 = 490 \\ \quad x_1 + 2x_2 + \quad x_3 = 310 \\ 2x_1 + 4x_2 + \quad x_3 = 560 \end{cases}$

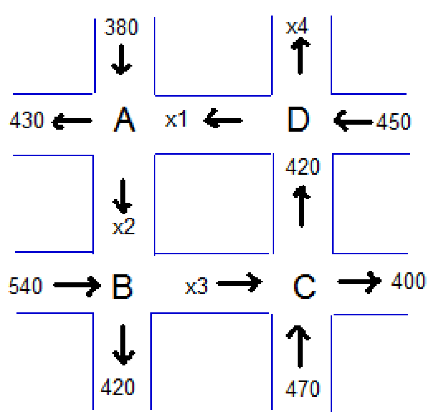
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 490 \\ 1 & 2 & 1 & 310 \\ 2 & 4 & 1 & 560 \end{array}\right] \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 310 \\ 3 & 1 & 2 & 490 \\ 2 & 4 & 1 & 560 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (-3F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-2F_1 + F_3) \to F_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 310 \\ 0 & -5 & -1 & -440 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{5}F_2 \to F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 310 \\ 0 & 1 & {}^{1}\!/_{5} & 88 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right] \quad (-2F_2 + F_1) \to F_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & {}^{3}\!/_{5} & 134 \\ 0 & 1 & {}^{1}\!/_{5} & 88 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right]$$

$$-F_3 \to F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & {}^{3}\!/_{5} & 134 \\ 0 & 1 & {}^{1}\!/_{5} & 88 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \left(-\frac{3}{5}F_3 + F_1\right) \to F_1 \\ \left(-\frac{1}{5}F_3 + F_2\right) \to F_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 98 \\ 0 & 1 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right]$$

Se debe producir 98 unidades del artículo A, 76 unidades del artículo B y 60 unidades del artículo C, para usar en su totalidad el tiempo que las máquinas tienen disponible.

2. A continuación se dá un diagrama que muestra el volumen de tráfico promedio por hora, de vehículos que entran y salen en cada una de 4 intersecciones de las calles más concurridas de una ciudad, entre las 7 am. y las 8 am. Determinar el número de vehículos que entran y salen en cada intersección en el período de tiempo establecido.



Solución

En cada intersección, el número de vehículos que entran es igual al número de vehículos que salen. Por lo tanto:

la intersección A conduce a la ecuación $380+x_1=430+x_2$,

la intersección B conduce a la ecuación $540+x_2=420+x_3$,

la intersección C conduce a la ecuación $470+x_3=820$,

la intersección D conduce a la ecuación $870=x_1+x_4$

Lo anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 50 \\ \quad x_2 - x_3 & = -120 \\ \qquad x_3 & = 350 \\ x_1 \qquad + x_4 & = 870 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \end{array}\right] \quad (-F_1+F_4)\to F_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 820 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} (F_2+F_1)\to F_1 \\ (-F_2+F_4)\to F_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -70 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 940 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (F_3+F_1)\to F_1 \\ (F_3+F_2)\to F_2 \\ (-F_3+F_4)\to F_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 590 \end{array}\right]$$

Se obtiene la solución $x_1=280$, $x_2=230$, $x_3=350$, $x_4=590$.

Por lo tanto, entre las 7 am. y las 8 am., se tiene que:

En la intersección A, entran $380+x_1=660$ vehículos y salen $430+x_2=660$ vehículos.

En la intersección B, entran $540+x_2=770$ y salen $420+x_3=770$ vehículos.

En la intersección C, entran $470+x_3=820$ y salen 820 vehículos.

En la intersección D, entran 870 vehículos y salen $x_1+x_4=870$ vehículos.

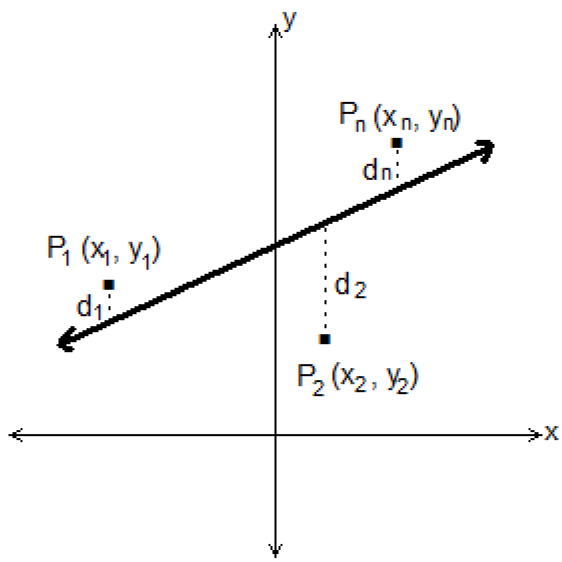
3. ***Sistemas de Ecuaciones Lineales en el Método de Mínimos Cuadrados***

Supongamos que se tiene un conjunto de puntos en el plano,

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n).$$

Asumiendo que los puntos tienen un comportamiento aproximadamente lineal, el objetivo es buscar la recta $y = mx + b$ que mejor describa el conjunto de puntos. Es decir, *la mejor aproximación lineal* para el conjunto de puntos dados.

La *mejor aproximación lineal* es una recta tal que la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta sea mínima. Usando la siguiente gráfica



se puede expresar la mejor aproximación lineal como la recta para la cual la suma

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2$$

es mínima.

Usando ecuaciones diferenciales parciales, se puede probar que la pendiente m y el y-intercepto b de la recta $y = mx + b$ (la mejor aproximación lineal del conjunto de puntos), se pueden obtener al resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variables m y b.

$$\begin{cases} nb + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) m = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2}\right) m = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{cases}$$

en donde

$n =$ número de puntos

$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (suma de las x-coordenadas de los puntos)

$\sum_{i=1}^{n} y_i = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ (suma de las y-coordenadas de los puntos)

$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} = x_1^{2} + x_2^{2} + \ldots + x_n^{2}$ (suma de los cuadrados de las x-coordenadas de los puntos)

$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ (suma de los productos de las coordenadas de cada punto).

Ejemplo:

La siguiente tabla muestra el número de mujeres americanas (M), que obtuvieron un grado doctoral en matemáticas en los años 1975, 1980, 1985 y 1990.

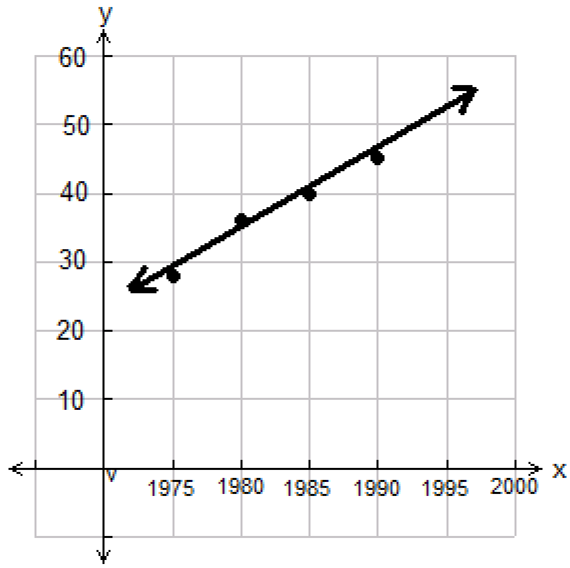
Año	1975	1980	1985	1990
M	28	36	40	45

Asumiendo que el crecimiento por año es aproximadamente lineal y que seguirá incrementándose linealmente en los próximos años, estimar el número de mujeres americanas que obtendrán su grado doctoral en el año 2010.

Solución

En este caso $n = 4$. Los puntos son $(75, 28)$, $(80, 36)$, $(85, 40)$ y $(90, 45)$.

La gráfica de los datos se muestra a continuación, y en ella se puede apreciar que tienen un comportamiento aproximadamente lineal.



Además,

	x^2	x	y	$x \cdot y$
	5625	75	28	2100
	6400	80	36	2880
	7225	85	40	3400
	8100	90	45	4050
Suma	27,350	330	149	12,430

Para hallar la ecuación de la recta $y = mx + b$ que mejor aproxime los datos, se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variables m y b.

$$\begin{cases} 4b + \quad 330m = 149 \\ 330b + 27{,}350m = 12{,}430 \end{cases}$$

Se va a resolver el sistema eliminando la variable b en ambas ecuaciones. Para esto, se multiplica la primera ecuación por -330 y la segunda por 4.

$$\begin{array}{r} -1{,}320\,b - 108{,}900\,m = -49{,}170 \\ 1{,}320\,b + 109{,}400\,m = 49{,}720 \\ \hline 500\,m = 550 \\ m = 1.1 \end{array}$$

Sustituyendo $m = 1.1$ en la primera ecuación, se obtiene

$$4b + 330(1.1) = 149$$

$$b = -53.5$$

La mejor aproximación lineal para el conjunto de datos dados es la recta

$$y = 1.1x - 53.5$$

Para estimar el número de mujeres que obtendrán su grado doctoral en el año 2010, de acuerdo con la escala usada, el año 2010 corresponde a $x = 110$.

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta, se tiene

$$x = 110 \quad \textit{entonces} \quad y = 1.1(110) - 53.5 = 67.5$$

Es decir, se estima que en el año 2010, aproximadamente 68 mujeres americanas obtengan su grado doctoral en matemáticas.

EJERCICIOS – PARTE II

1) Escribir en forma matricial el siguiente sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

2) Escribir el sistema representado por la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3) Escribir la matriz aumentada del siguiente sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

4) Determine si cada matriz está en forma escalonada.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5) Usando el método de eliminación de Gauss-Jordan resolver cada sistema de ecuaciones lineales y dar su conjunto solución.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$

6) Hallar la recta $y = mx + b$ que mejor aproxime cada conjunto de puntos.

a) $(1,4),(2,6),(3,10),(4,15),(5,20)$

b) $(1,3),(3,5),(4,10),(7,12),(10,20)$

7) En una sala de cine el costo para un adulto es \$9 y para un niño es de \$7. Si en un día acuden 325 personas y se recauda \$2,495, cuántos adultos y cuántos niños asistieron?.

III. Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales de la forma **Ax=0** se llama sistema homogéneo. Es decir, es un sistema de ecuaciones lineales en el cual todos los términos constantes son iguales a cero.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Un sistema homogéneo **siempre** es **consistente,** pues tiene al menos la llamada **solución trivial**, en la cual todas las variables toman el valor cero.

Si la matriz escalonada reducida (o escalonada) de un sistema homogéneo $m \times n$ (m ecuaciones con n variables) tiene r filas distintas de cero, entonces se presentan las siguientes posibilidades:

1. Si $r = n$, el sistema tiene solución única, la cual consiste en la solución trivial.
2. Si $r < n$, el sistema tiene infinitas soluciones. Es decir, tiene soluciones distintas de la trivial.

<u>Ejemplos:</u>

Resolver cada uno de los siguientes sistemas homogéneos usando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

Solución

Al escribir la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, no es necesario escribir el vector columna de los términos constantes, pues se sabe que todos sus elementos son iguales a cero. Por lo tanto, la matriz ampliada del sistema coincide con la matriz de los coeficientes.

En el sistema que se va a resolver, la matriz ampliada es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-3F_1 + F_3) \to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2F_2 + F_1) \to F_1 \\ (7F_2 + F_3) \to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 61 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{61}F_3 \to F_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (19F_3 + F_1) \to F_1 \\ (-8F_3 + F_2) \to F_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtuvo la matriz identidad, por lo tanto el sistema tiene solución única (la solución trivial),

$$x_1 = 0 \, , \, x_2 = 0 \, , \, x_3 = 0$$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-4F_1 + F_3) \to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -11 & 10 \\ 0 & 11 & -7 & 10 \end{bmatrix} \; -F_2 \to F_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 11 & -10 \\ 0 & 11 & -7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} (2F_2 + F_1) \to F_1 \\ (-11F_2 + F_3) \to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 25 & -22 \\ 0 & 1 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & -128 & 120 \end{bmatrix} \; -\frac{1}{128}F_3 \to F_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 25 & -22 \\ 0 & 1 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{16} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} (-25F_3 + F_1) \to F_1 \\ (-11F_3 + F_2) \to F_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{16} \end{bmatrix}$$

x_4 es una variable libre.

La solución del sistema está dada por

$x_1 = -\frac{23}{16}t$, $x_2 = -\frac{5}{16}t$, $x_3 = \frac{15}{16}t$ y $x_4 = t$, donde t toma valores en el conjunto de los números reales.

<u>Algunos Teoremas sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos</u>

<u>Teorema 1</u>

Un sistema de ecuaciones lineales, homogéneo, con mas variables que ecuaciones $(n > m)$, tiene infinitas soluciones.

Teorema 2

Sea $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

i) Si los vectores columna $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ son soluciones del sistema, entonces el vector columna $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ también es una solución del sistema.

ii) Si el vector columna $\boldsymbol{c}$ es una solución del sistema y α es cualquier escalar, el vector columna $\boldsymbol{c}\alpha$, también es una solución del sistema.

Demostración

i) Supongamos que los vectores columna $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ son soluciones del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, lo cual significa que $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ y $A\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$.

$$A(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = A\boldsymbol{c} + A\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

Por lo tanto, el vector columna $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ es una solución del sistema.

ii) Si el vector columna $\boldsymbol{c}$ es una solución del sistema, entonces $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

$$A(\boldsymbol{c}\alpha) = (A\boldsymbol{c})\alpha = \boldsymbol{0} \cdot \alpha = \boldsymbol{0}$$

Por lo tanto, el vector columna $\boldsymbol{c}\alpha$ es una solución del sistema.

Una generalización del teorema 2 se enuncia en el siguiente corolario.

Corolario

Si los vectores columna $\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \ldots, \boldsymbol{s_t}$ son soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ y si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ son escalares, entonces el vector columna

$$\boldsymbol{s_1}\alpha_1, \boldsymbol{s_2}\alpha_2, \ldots, \boldsymbol{s_t}\alpha_t$$

también es una solución del sistema.

EJERCICIOS – PARTE III

1) Determine si cada sistema tiene soluciones distintas de la solución trivial.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

2) Resolver cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

3) Dado el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$, para qué valores de λ el sistema tiene

a) Solución única.

b) Infinitas soluciones.

4) Dado el sistema $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$, para qué valores de λ el sistema tiene

a) Solución única.

b) Infinitas soluciones.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EJERCICIOS – PARTE I

1) a) si b) si

2) a) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

c) $x_1 = 9$, $x_2 = -2$ d) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$

3) a) Inconsistente

b) $\left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| \; x_1 = 5t - 2 \, , \, x_2 = 4t - 3 \, , \, x_3 = t \, ; \; t \; es \; un \; número \; real \right\}$

c) $\left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| \; x_1 = \frac{4}{7}t + \frac{2}{7} \, ; \, x_3 = -\frac{13}{7}t + \frac{4}{7} \, ; \, x_2 = t \, ; \, t \; es \; un \; número \; real \right\}$

d) Inconsistente

e) $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$

f) $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{8}{3}$, $x_3 = \frac{1}{9}$

4) $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{5}{3}$, $c = 1$

5) 80 cajas del diseño *A* y 120 cajas del diseño *B*.

6) $\frac{3}{5}$

7) 15 billetes de \$2 y 18 billetes de \$5.

EJERCICIOS – PARTE II

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & -13 & 14 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \end{array} \right]$

4) a) no b) si c) si d) no

5) a) $\{\ \}$. El sistema es inconsistente. b) $\left\{\left(\frac{1}{10}, -\frac{3}{10}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

c) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, x_1 = 1-\frac{3}{5}t,\ x_2 = -\frac{1}{5}t,\ x_3 = t,\ \textit{donde } t \textit{ es cualquier número real.}\right\}$

d) $\{\ \}$ El sistema es inconsistente.

e)

$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_1 = 1-t-s, x_2 = t, x_3 = s, x_4 = 2, x_5 = -1 \textit{ donde } t \textit{ y } s \textit{ toman valores reales.}\}$

6) a) $y = 4.1x - 1.3$ b) $y = 1.84x + 0.8$

7) 110 adultos y 215 niños.

EJERCICIOS – PARTE III

1) a) El sistema tiene más variables que ecuaciones, por lo tanto debe tener soluciones distintas de la trivial.

b) El sistema tiene solución única, por lo tanto no tiene soluciones distintas de la trivial.

c) El sistema es equivalente a uno de dos ecuaciones con tres variables, por lo tanto tiene soluciones distintas de la trivial.

2) a) $x_1 = -2t$, $x_2 = t$, donde t es cualquier número real.

b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

c) $x_1 = t$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = t$, donde t es cualquier número real.

d) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

3) a) $\lambda \neq 6$ b) $\lambda = 6$

4) a) $\lambda \neq 1$ b) $\lambda = 1$

DETERMINANTES

I. Definición – Evaluación de Determinantes

Definición

Sea M_n el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n, y sea E un conjunto de escalares. (Por ejemplo, E pudiera ser el conjunto de los números reales o de los números complejos).

Se define la *función determinante f*, del conjunto M_n en E, la cual a cada matriz A de M_n le asigna un escalar del conjunto E, denotado por $\det(A)$ o $|A|$.

$$\begin{aligned} f : M_n &\rightarrow \quad E \\ A &\rightarrow \det(A) \end{aligned}$$

<u>*Nota:*</u>

Al determinante de una matriz cuadrada de orden n se le llama *determinante de orden n*.

(Se va a denotar por $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ las filas de una matriz A en M_n).

La función f tiene las siguientes propiedades:

i) $f\left(\mathbf{v_1}, \ldots, \alpha\mathbf{v_i}, \ldots, \mathbf{v_n}\right) = \alpha f\left(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_i}, \ldots, \mathbf{v_n}\right)$, α escalar y $\alpha \neq 0$.

ii)

$$f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_{i-1}},\mathbf{v_i}+\mathbf{u_i},\mathbf{v_{i+1}},\ldots,\mathbf{v_n}\right) = f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_{i-1}},\mathbf{v_i},\mathbf{v_{i+1}},\ldots,\mathbf{v_n}\right) + f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_{i-1}},\mathbf{u_i},\mathbf{v_{i+1}},\ldots,\mathbf{v_n}\right)$$

Las dos primeras propiedades expresan que la función determinante tiene las propiedades de linealidad.

iii) $f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_i},\ldots,\mathbf{v_j},\ldots,\mathbf{v_n}\right) = 0$ si $\mathbf{v_i} = \mathbf{v_j}$ con $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$.

Esta propiedad dice que si la matriz tiene dos filas (o columnas) iguales, el valor del determinante es cero.

iv) $f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_i},\ldots,\mathbf{v_j},\ldots,\mathbf{v_n}\right) = -f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_j},\ldots,\mathbf{v_i},\ldots,\mathbf{v_n}\right)$

Esta propiedad dice que el determinante de la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas (o columnas) de una matriz A, es opuesto al determinante de la matriz A.

v) $f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{0},\ldots,\mathbf{v_n}\right)=0$

Esta propiedad dice que si una matriz tiene una fila (o columna) cuyos elementos son todos iguales a cero, entonces el valor del determinante de la matriz es cero.

vi) $f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_i},\ldots,\mathbf{v_j},\ldots,\mathbf{v_n}\right)= f\left(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_i},\ldots,\left(\alpha\mathbf{v_i}+\mathbf{v_j}\right),\ldots,\mathbf{v_n}\right)$

Esta propiedad dice que el determinante de la matriz que se obtiene al sustituir una fila (o columna) de una matriz A por la suma de esa fila (o columna) con un múltiplo distinto de cero de otra fila (o columna) es igual al determinante de la matriz A.

vii) $f\left(I_n\right)=1$, siendo I_n la matriz identidad de orden n.

Ahora se va a considerar cómo se obtiene el determinante de matrices cuadradas de orden $n=1$, $n=2$ y $n=3$.

1. Si $n=1$, la matriz A tiene la forma $A=[a]$, en donde a es un número real. Entonces,

$$\begin{aligned} f: M_1 &\quad\rightarrow\quad E \\ A=[a] &\quad\rightarrow\quad \det(A)=a \end{aligned}$$

<u>*Ejemplo:*</u>

Si $A=[-3]$, entonces $\det(A)=\det([-3])=-3$

2. Si $n=2$, entonces, M_2 es el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 2, y

$$\begin{aligned} f:\quad M_2 &\quad\rightarrow\quad E \\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &\quad\rightarrow\quad \det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

El determinante de A se llama *determinante de orden 2*.

<u>*Ejemplo:*</u>

Si $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, entonces $\det(A)=(-1)(-3)-(-2)(4)=3+8=11$.

3. Si $n=3$, M_3 es el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 3, y

$$f \quad : \qquad M_3 \qquad \longrightarrow \qquad E$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \ \det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Este determinante se puede evaluar, por medio del siguiente proceso:

Se escriben los elementos de la matriz en el mismo orden en que aparecen, se traza una línea vertical y a continuación se escriben las dos primeras columnas de la matriz.

Se obtiene el siguiente arreglo

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

El valor del determinante se obtiene sumando los productos de los elementos en cada diagonal que baja , y luego restando los productos de los elementos en cada diagonal que sube (como se ilustra en la figura).

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{array}$$

Es decir,

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ejemplo:

Hallar $\det(A)$ si $A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

$$\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\det(A)=(-3)(-5)(0)+(1)(3)(1)+(-2)(4)(2)-(1)(-5)(-2)-(2)(3)(-3)-(0)(4)(1)$$

$$\det(A)=0+3-16-10+18-0=-5$$

Evaluación de Determinantes de Cualquier Orden

Para evaluar determinantes de orden $n \geq 2$, primero necesitamos las siguientes dos definiciones.

Definición 1

Sea A una matriz cuadrada de orden n. El *Menor* de orden(i, j) de la matriz A, denotado por $M_{i\,j}$ o $|A_{i\,j}|$, es el determinante de la submatriz que se obtiene de A, al eliminar en A la fila i y la columna j.

Ejemplo:

Si $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, hallar:

a) M_{13}

b) M_{21}

Solución

a) M_{13} es el determinante de la submatriz que se obtiene de A al eliminar la fila 1 y la columna 3 de A.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=10-(-2)=12$$

b) M_{21} es el determinante de la submatriz que se obtiene de A al eliminar la fila 2 y la columna 1 de A.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18-35=-53$$

Definición 2

Sea A una matriz cuadrada de orden n. El *Cofactor* de orden (i, j) de la matriz A, denotado por $C_{i\,j}$ se define por $C_{i\,j}=(-1)^{i+j}\,M_{i\,j}$.

Es decir,

si $i+j$ es un número par, entonces $C_{i\,j}=M_{i\,j}$,

y si $i+j$ es un número impar, entonces $C_{i\,j}=-M_{i\,j}$.

<u>*Ejemplo:*</u>

Si $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, hallar:

a) C_{13}

b) C_{21}

Solución

a) $C_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^4M_{13}=(1)M_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=12$

b) $C_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^3M_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 7\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-(-53)=53$

Evaluación de un Determinante de Orden *n*

Si $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$ entonces se puede evaluar $\det(A)$ usando una fila cualquiera. Supongamos que la fila escogida es la fila *i*. Entonces,

$$\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\ldots+a_{ij}C_{ij}+\ldots+a_{in}C_{in}$$

También se puede evaluar el determinante escogiendo una columna cualquiera, digamos la columna *j*. Entonces,

$$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\ldots+a_{ij}C_{ij}+\ldots+a_{nj}C_{nj}$$

En otras palabras, para evaluar un determinante de orden $n\geq 2$, se escoge una fila o una columna cualquiera y se multiplica cada elemento de la fila o columna escogida por su correspondiente cofactor. La suma de estos productos es el valor del determinante.
Este método de evaluar un determinante es llamado *Expansión de Laplace* por la fila o columna escogida.

Nota

El valor del determinante de una matriz cuadrada **no** depende de la fila o columna escogida para evaluarlo. Es decir, el valor del determinante es único.

<u>Ejemplos</u>:

Evaluar cada determinante.

1. $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Solución

Como se puede escoger cualquier fila o cualquier columna para evaluar el determinante, vamos a escoger la columna 3.

Para evaluar el determinante, se multiplica cada elemento de la columna 3 por su correspondiente cofactor, y se suman estos productos. Entonces

$$\det(A)=(-1)C_{13}+(2)C_{23}+(1)C_{33}$$

$$\det(A)=(-1)M_{13}-(2)M_{23}+(1)M_{33}$$

$$\det(A)=(-1)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\det(A)=(-1)(20-14)-(2)(8-8)+(1)(14-20)$$

$$\det(A)=(-1)(6)-(2)(0)+(1)(-6)=-12$$

2. $\det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 6 \\ 5 & 6 & -7 & 5 \\ -8 & -9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Solución

Escogemos la primera fila para evaluar el determinante.

Se multiplica cada elemento de la primera fila por su correspondiente cofactor y se suman estos productos.

$$\det(B)=(1)C_{11}+(2)C_{12}+(-3)C_{13}+(4)C_{14}$$

$$\det(B)=1M_{11}-2M_{12}-3M_{13}-4M_{14}$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix}4&-7&6\\6&-7&5\\-9&1&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&-7&6\\5&-7&5\\-8&1&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3&4&6\\5&6&5\\-8&-9&2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}3&4&-7\\5&6&-7\\-8&-9&1\end{vmatrix}$$

$$\det(B)=(-19)-2(-13)-3(-11)-4(12)$$

$$\det(B)=-19+26+33-48=-8$$

EJERCICIOS PARTE I

1) Para la matriz $A=\begin{bmatrix}2&3&-4\\0&-4&2\\1&-1&5\end{bmatrix}$, hallar:

a) Todos sus menores.

b) Todos sus cofactores.

2) Hallar los valores de t para que se de la igualdad en cada caso.

a) $\begin{vmatrix}t&t\\4&2t\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}t-3&1\\2&t-4\end{vmatrix}=0$

3) Evaluar cada determinante de orden 2.

a) $\begin{vmatrix}3&1\\4&2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}6&1\\5&2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}6&4\\-1&3\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}8&-3\\4&2\end{vmatrix}$

4) Evaluar cada determinante de orden 3.

a) $\begin{vmatrix}3&4&2\\1&-1&5\\1&2&-2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1&3&-2\\6&1&-5\\8&2&3\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}4&-1&2\\6&-1&0\\1&-3&4\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}3&-9&4\\1&4&0\\8&-3&1\end{vmatrix}$

5) Evaluar el siguiente determinante $\begin{vmatrix}2&-1&4&-3\\-1&1&0&2\\3&2&3&-1\\1&-2&2&3\end{vmatrix}$.

II. Ejemplos de las Propiedades de los Determinantes y Evaluación de Determinantes usando Propiedades.

Ejemplos de las propiedades de los determinantes

1. Este ejemplo ilustra la propiedad (i).

Si una matriz B se obtiene de una matriz A al multiplicar una de sus filas o columnas por un escalar $\alpha \neq 0$, entonces $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Se multiplica la primera columna de A por el escalar -2, para obtener la matriz

$B = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$.

$\det(A) = 8 - 15 = -7$ y

$\det(B) = -16 + 30 = 14 = (-2)\cdot(-7) = -2 \cdot \det(A)$

2. El siguiente ejemplo ilustra la propiedad (ii), en donde cada elemento de una fila o columna se expresa como una suma de dos números, entonces el determinante de la matriz se puede expresar como la suma de dos determinantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & (-2+10) \\ 1 & (5+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{-2} \\ 1 & \boxed{5} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & \boxed{10} \\ 1 & \boxed{1} \end{vmatrix}$$

$(12-8) = (10+2) + (2-10)$

$4 = 12 + -8$

$4 = 4$

3. Ejemplo de la propiedad (iii).

Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, entonces el valor de su determinante es cero.

En el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$, la primera y la tercera columna son iguales.

Se va a resolver el determinante usando la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (2)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(9) - (-24) + (3)(-14) = 18 + 24 - 42 = 0$$

4. Ejemplo de la propiedad (iv)

Si una matriz B se obtiene de una matriz A al intercambiar de posición dos filas o columnas de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.

Al intercambiar la fila 1 y la fila 2 de $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, se obtiene la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

$\det(A) = 34$ y $\det(B) = -34 = -\det(A)$.

5. Ejemplo de la propiedad (v).

Si una matriz tiene una fila o columna cuyos elementos son todos iguales a cero, entonces su determinante vale cero.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, basta con escoger la fila 2 para evaluar el determinante y todos los productos de los elementos de la fila 2 por sus correspondientes cofactores serán iguales a cero, por lo tanto, el determinante vale cero.

6. Ejemplo de la propiedad 6.

El determinante de la matriz que se obtiene al sustituir una fila (o columna) de una matriz A por la suma de esa fila (o columna) con un múltiplo distinto de cero de otra fila (o columna) es igual al determinante de la matriz A.

Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}$. Sobre A se van a hacer las siguientes operaciones,

$(-2F_1+F_2)\to F_2$ y $(-4F_1+F_3)\to F_3$, para obtener una matriz B.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{matrix}(-2F_1+F_2)\to F_2\\ (-4F_1+F_3)\to F_3\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & -10 & -9\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & -10 & -9\end{bmatrix}$$

Se evalúa $\det(A)$ usando la primera columna.

$$\det(A)=(1)\begin{vmatrix}5 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}+(4)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=(13)-(2)(12)+(4)(-17)=-79$$

Se evalúa $\det(B)$ usando la primera columna.

$$\det(B)=(1)\begin{vmatrix}1 & -7\\ -10 & -9\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix}2 & 3\\ -10 & -9\end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -7\\ -10 & -9\end{vmatrix}=-9-70=-79$$

7. Ejemplo de la propiedad (vii)

El determinante de la matriz identidad de cualquier orden vale 1.

Sea $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, la matriz identidad de orden 3.

Se evalúa $\det(I)$ usando la primera fila.

$$\det(I)=(1)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=(1)(1-0)=(1)(1)=1$$

Ejemplo:

Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$, use propiedades de los determinantes para hallar el valor de cada uno de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & -6 & -9 \\ u & v & w \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \\ u-1 & v-2 & w-3 \end{vmatrix}$

Solución

a) Si se multiplica la tercera fila del determinante dado por -3, el valor del determinante queda multiplicado por -3.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 4 = -12$$

Si en este último determinante se intercambian la segunda fila y la tercera fila, el determinante cambia su signo por el signo opuesto.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & -6 & -9 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 12$$

b) Si en el determinante dado, se hace $(-F_3 + F_2) \to F_2$, el determinante conserva su valor.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (-F_3 + F_2) \to F_2 \text{ , entonces se obtiene } \begin{vmatrix} x & y & z \\ u-1 & v-2 & w-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Si sobre este último determinante se hace $2F_1 \to F_1$, el valor del determinante se multiplica por 2.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u-1 & v-2 & w-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 2F_1 \to F_1 \text{, } \textit{se obtiene} \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ u-1 & v-2 & w-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

Si en el último determinante se hace $F_1 \leftrightarrow F_3$, el valor del determinante cambia su signo por el signo opuesto.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ u-1 & v-2 & w-3 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -8$$

Finalmente, si se hace $F_2 \leftrightarrow F_3$, el valor del determinante cambia su signo por el signo opuesto.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \\ u-1 & v-2 & w-3 \end{vmatrix} = 8$$

Otras propiedades

1. El determinante de un producto de dos matrices A y B, es igual al producto de sus determinantes. Es decir,

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, entonces $AB = \begin{bmatrix} 13 & 29 \\ 11 & -25 \end{bmatrix}$

$\det(A) = -14$ y $\det(B) = 46$.

$\det(AB) = -644 = (-14) \cdot (46) = \det(A) \cdot \det(B)$.

2. Si A es una matriz triangular, es decir, si A tiene ceros por encima o por debajo de su diagonal principal, entonces el valor de su determinante es el producto de los elementos en la diagonal.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Sus elementos en la diagonal son 2 , -7 y -1.

Usamos la primera columna para evaluar $\det(A)$.

$\det(A)=(2)\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=(2)(7)=14=(2)(-7)(-1)=$ producto de los elementos en la diagonal.

3. El determinante de una matriz cuadrada A y el de su transpuesta A^T, son iguales.

Ejemplo:

Hay que recordar que A^T se forma haciendo que las filas de A sean las columnas de A^T.

Si $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ entoces $A^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Se va a usar la primera fila de A para evaluar $\det(A)$, y la segunda columna de A^T para evaluar $\det(A^T)$.

$$\det(A)=-(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}+(3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-(1)(-4)+(3)(2)=10$$

$$\det(A^T)=-(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(1)(-6)-(1)(-4)=10$$

Evaluación de un determinante usando propiedades

Cuando los determinantes son de orden $n \geq 3$, podría ser conveniente usar la propiedad (vi) de los determinantes, con el propósito de reducir el número de operaciones necesarias para evaluar el determinante.

Ejemplo:

Usando propiedades de los determinantes, evaluar $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Solución

Se puede intercambiar las filas 1 y 3, y por la propiedad (iv), el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad F_1 \leftrightarrow F_3 \quad -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Ahora se puede aplicar la propiedad (vi), y el valor del determinante que se obtenga después de aplicar la propiedad, es igual al valor del determinante anterior.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} (2F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-2F_1 + F_3) \to F_3 \\ (F_1 + F_4) \to F_4 \end{array} \quad -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Se evalúa el determinante usando la primera columna

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Se pueden aplicar propiedades nuevamente, para evaluar el determinante de orden 3.
Si se intercambian las filas 1 y 2, el determinante cambia de signo.

$$-(1)\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad (1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Si se multiplica la primera fila por -1, el determinante queda multiplicado por -1.

$$(1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (-1)F_1 \rightarrow F_1 \quad (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Ahora se puede aplicar la propiedad (vi) nuevamente, y el determinante no cambia su valor.

$$(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (-3F_1 + F_2) \rightarrow F_2 \\ (3F_1 + F_3) \rightarrow F_3 \end{matrix} \quad (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix}$$

Se resuelve el determinante por la primera columna

$$(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} = (-1)\left[(1)\begin{vmatrix} 1 & -19 \\ -1 & 23 \end{vmatrix}\right] = -\begin{vmatrix} 1 & -19 \\ -1 & 23 \end{vmatrix} = -(23-19) = -4$$

<u>*Nota*</u>

Al evaluar el determinante de una matriz A cuadrada de orden n con $n > 3$, y asumiendo que la matriz no tiene elementos iguales a cero, el método de usar las propiedades de los determinantes (eliminación) es en general más eficiente que el método de los cofactores, en el sentido de que involucra un número menor de operaciones aritméticas.

En la tabla que se presenta a continuación, se compara el número de operaciones aritméticas necesarias al evaluar un determinante usando ambos métodos. La tabla presenta los casos para determinantes de orden $n = 2, 3, 4, 5, 10$.

Método de los Cofactores			Método de Eliminación (Propiedades)		
n	Sumas	Multiplicaciones	n	Sumas	Multiplicaciones y Divisiones
2	1	2	2	1	3
3	5	9	3	5	10
4	23	40	4	14	23
5	119	205	5	30	45
10	3,628,799	6,235,300	10	285	339

Algunos teoremas sobre determinantes

Teorema 1

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) A es no-singular, es decir, A tiene inversa.

ii) El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solucion única. (La solución trivial).

iii) $\det(A) \neq 0$.

Teorema 2

Sea A es un a matriz cuadrada de orden n. Si A es no-singular, entonces

$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$$

Demostración

Como A es no-singular, existe su inversa A^{-1} y $AA^{-1} = I$.

Tomando el determinante en ambos lados de la ecuación anterior se tiene

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det(I)$$

$$(\det A)\left(\det A^{-1}\right) = 1$$

$$\left(\det A^{-1}\right) = \frac{1}{(\det A)} = (\det A)^{-1}$$

Teorema 3

Un sistema de n ecuaciones lineales con n variables, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tiene solución única para cualquier vector columna $\mathbf{b}$ si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

EJERCICIOS PARTE II

1) Usando propiedades de los determinantes, mostrar que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

2) Si $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 8$, use propiedades de los determinantes para hallar el valor de cada uno de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2x & y \\ 2a & b \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} y & x \\ b & a \end{vmatrix}$

3) Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$, use propiedades de los determinantes para hallar el valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-u & y-v & z-w \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

4) Hallar el determinante de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -7 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5) Hallar el valor de cada determinante, usando propiedades.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

6) Dada la matriz no singular $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, hallar el determinante de A^{-1}.

III. Aplicaciones de los Determinantes

1. Regla de Cramer

Es un método que se usa para resolver sistemas de n ecuaciones ecuaciones lineales con n variables, mediante el uso de determinantes.

<u>Teorema</u> (***Regla de Cramer***)

Sea $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ un sistema de n ecuaciones lineales con n variables.

Si $\det(A) \neq 0$ y si A_i es la matriz que se obtiene al reemplazar la columna i de A por el vector columna $\mathbf{b}$ de los términos constantes, entonces, la solucion única del sistema está dada por

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

<u>Nota</u>

Si $\det(A) = 0$, la Regla de Cramer **no** se puede aplicar.

<u>*Ejemplo:*</u>

Use la Regla de Cramer para resolver el sistema $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

Solución

Se forman los siguientes determinantes:

i) $\det(A)$, que es llamado el determinante del sistema.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

ii) $\det(A_1)$, el cual se forma a partir del determinante de A, al sustituir la primera columna, la cual contiene los coeficientes de x_1 en las distintas ecuaciones del sistema, por la columna de términos constantes.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 & -1 \\ \boxed{-1} & 3 & 4 \\ \boxed{8} & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

iii) $\det(A_2)$, el cual se forma a partir del determinante de A, al sustituir la segunda columna, la cual contiene los coeficientes de x_2 en las distintas ecuaciones del sistema, por la columna de términos constantes.

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & \boxed{3} & -1 \\ 2 & \boxed{-1} & 4 \\ 3 & \boxed{8} & 2 \end{vmatrix}$$

iv) $\det(A_3)$, el cual se forma a partir del determinante de A, al sustituir la tercera columna, la cual contiene los coeficientes de x_3 en las distintas ecuaciones del sistema, por la columna de términos constantes.

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & 3 & \boxed{-1} \\ 3 & 4 & \boxed{8} \end{vmatrix}.$$

Se evalúa cada uno de estos determinantes.

Evaluando el $\det(A)$ por la primera fila, se tiene

$$\det(A)=(5)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(5)(-10)-(2)(-8)+(-1)(-1)=-33$$

Evaluando el $\det(A_1)$ por la primera fila, se tiene

$$\det(A_1)=(3)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 8 & 2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 8 & 4\end{vmatrix}=(3)(-10)-(2)(-34)+(-1)(-28)=66$$

Evaluando el $\det(A_2)$ por la primera fila, se tiene

$$\det(A_2)=(5)\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 8 & 2\end{vmatrix}-(3)\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 8\end{vmatrix}=(5)(-34)-(3)(-8)+(-1)(19)=-165$$

Evaluando $\det(A_3)$ por la primera fila, se tiene

$$\det(A_3)=(5)\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 8\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 8\end{vmatrix}+(3)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(5)(28)-(2)(19)+(3)(-1)=99$$

Por lo tanto, la solución del sistema está dada por

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{66}{-33}=-2 \quad ; \quad x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{-165}{-33}=5 \quad ; \quad x_3=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{99}{-33}=-3$$

2. Uso de Determinantes para hallar la Inversa de una Matriz no singular

Definición (La Adjunta de una Matriz Cuadrada)

Sea A una matriz cuadrada de orden n. La *matriz adjunta* de A, denotada por $adj(A)$, se define por

$$adj(A)=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n}\\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1}\\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn}\end{bmatrix}$$

donde C_{ij} es el cofactor de orden (i, j) de la matriz A, para $i, j=1,2,\dots,n$.

Es decir, que para formar la matriz adjunta de una matriz cuadrada A, se sustituye cada elemento de la matriz por su correspondiente cofactor,.e inmediatamente se transpone la matriz. En otras palabras, la adjunta de A, es la transpuesta de la matriz de los cofactores.

<u>*Ejemplo:*</u>

Hallar la adjunta de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución

$$adj(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>*Teorema*</u>

Para cualquier matriz cuadrada A de orden n,

$$A \cdot (adjA) = (adjA) \cdot A = (\det A) \cdot I$$

donde I es la matriz identidad de orden n. Entonces, si $\det(A) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (adjA)$$

<u>*Ejemplo:*</u>

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

a) Hallar $\det(A)$

b) Hallar $adj(A)$

c) Verificar que $A \cdot (adjA) = (adjA) \cdot A = (\det A) \cdot I$.

d) Hallar A^{-1} usando la matriz adjunta de A.

Solución

a) Se evalúa el determinante de A, usando la primera columna.

$$\det(A)=2\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-5\cdot(-5)+1\cdot(-7)=14$$

b)

$$(adjA)=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix} \end{vmatrix}^T=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 6\\ 5 & -2 & -1\\ -7 & 14 & -7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -7\\ -2 & -2 & 14\\ 6 & -1 & -7\end{bmatrix}$$

c)

$$A\cdot(adjA)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 5 & -7\\ -2 & -2 & 14\\ 6 & -1 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-4-6+24) & (10-6-4) & (-14+42-28)\\ (-10-8+18) & (25-8-3) & (-35+56-21)\\ (-2-4+6) & (5-4-1) & (-7+28-7)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{bmatrix}$$

$$(adjA)\cdot A=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -7\\ -2 & -2 & 14\\ 6 & -1 & -7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-4+25-7) & (-6+20-14) & (-8+15-7)\\ (-4-10+14) & (-6-8+28) & (-8-6+14)\\ (12-5-7) & (18-4-14) & (24-3-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{bmatrix}$$

$$(\det A)\cdot I=14\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A\cdot(adjA)=(adjA)\cdot A=(\det A)\cdot I$$

d)

$$A^{-1}=\frac{1}{(\det A)}\cdot(adjA)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 5 & -7\\ -2 & -2 & 14\\ 6 & -1 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 1\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

3. Determinantes - Área y Volumen

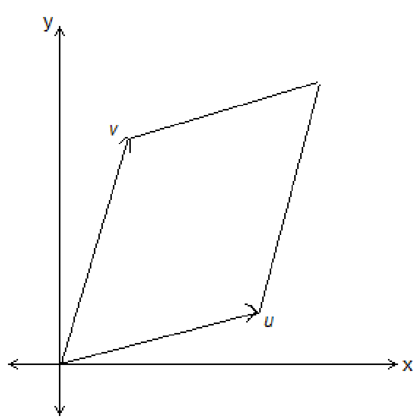
Los determinantes están relacionados con las nociones de área y volumen.

<u>*Area de un Paralelogramo*</u>

Un paralelogramo es un polígono de cuatro lados, que tiene sus lados opuestos iguales y paralelos.

Sea $\boldsymbol{R^2}=\left\{(a_1,a_2)\,\middle|\, a_1,a_2 \textit{ son números reales.}\right\}$

Sea P el paralelogramo determinado por los vectores $\boldsymbol{u}=(a_1,a_2)$ y $\boldsymbol{v}=(b_1,b_2)$ de $\boldsymbol{R^2}$, como se muestra en la figura.



Entonces el área de P, denotada por $A(P)$, está dada por

$$A(P)=\left|\det\left(\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\right)\right|=|a_1 b_2-b_1 a_2|$$

Es decir, el valor absoluto del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente los elementos de cada uno de los vectores que determinan el paralelogramo.

Ejemplo:

Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores $\boldsymbol{u} = (2,3)$ y $\boldsymbol{v} = (5,-1)$.

Solución

Sea P el paralelogramo determinado por los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. Entonces

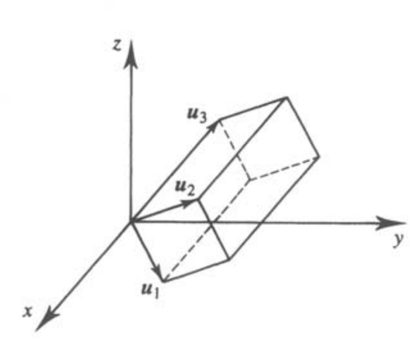
$$A(P) = \left| \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \right) \right| = \left| -2-15 \right| = \left| -17 \right| = 17 \quad \text{unidades cuadradas.}$$

Volumen de un Paralelepípedo

Un paralelepípedo es un sólido que consta de seis caras las cuales son paralelogramos y que son paralelas de a dos.

Sea $\boldsymbol{R^3} = \left\{ (a_1, a_2, a_3) \,\middle|\, a_1, a_2, a_3 \text{ son números reales} \right\}$.

Sea S el paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{u_1} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{u_2} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\boldsymbol{u_3} = (c_1, c_2, c_3)$ de $\boldsymbol{R^3}$, como se muestra en la siguiente figura.



Entonces, el volumen de S, denotado por $V(S)$, está dado por

$$V(S)=\left|\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right)\right|$$

Es decir, el valor absoluto del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente los elementos de cada uno de los vectores que determinan el paralelepípedo

Nota:

Si los vectores que determinan el.paralelepípedo no son independientes, es decir, si al menos uno de ellos es múltiplo de otro, entonces el volumen es cero. Esto significa que no se puede construir un paralelepípedo con los vectores dados.

Ejemplo:

Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{u_1}=(1,1,3)$, $\boldsymbol{u_2}=(1,-2,-4)$ y $\boldsymbol{u_3}=(4,1,2)$.

Solución

Sea S el paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ y $\boldsymbol{u_3}$. Entonces

$$V(S)=\left|\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\right|=|9|=9 \text{ unidades cúbicas.}$$

EJERCICIOS PARTE III

1) Resolver cada sistema, usando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x_1+x_2=7 \\ 3x_1-5x_2=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1-3x_2=-5 \\ 2x_1+3x_2=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_2+2x_1=x_3+1 \\ 3x_1+2x_3=8-5x_2 \\ 3x_3-1=x_1-2x_2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=8 \\ 2x_1+3x_2-x_3=-2 \\ 3x_1-x_2-9x_3=9 \end{cases}$

2) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 5 & 0\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 2 & -3\end{bmatrix}$, hallar:

a) C_{31} b) C_{23} c) C_{42}

3) Si $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, hallar:

a) $\det(A)$ b) $(adjA)$ c) A^{-1}

4) Verifique que si una matriz cuadrada de orden 2 tiene la forma $A=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$,en donde k es un número real, entonces $A=(adjA)$.

5) Hallar el área $A(P)$ del paralelogramo P en $\boldsymbol{R^2}$, determinado por cada conjunto de vectores:

a) $(3,2)$ y $(4,5)$ b) $(1,1)$ y $(0,2)$

6) Hallar el volumen $V(S)$ del paralelepípedo S en $\boldsymbol{R^3}$, determinado por cada conjunto de vectores:

a) $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ y $(0,2,3)$. b) $(1,2,-3)$, $(3,4,-1)$ y $(2,-1,5)$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

EJERCICIOS PARTE I

1) a) $M_{11}=-18$, $M_{12}=-2$, $M_{13}=4$, $M_{21}=11$, $M_{22}=14$, $M_{23}=-5$, $M_{31}=-10$, $M_{32}=4$, $M_{33}=-8$.

b) $C_{11}=-18$, $C_{12}=2$, $C_{13}=4$, $C_{21}=-11$, $C_{22}=14$, $C_{23}=5$, $C_{31}=-10$, $C_{32}=-4$, $C_{33}=-8$.

2) a) $t=0$ o $t=2$ b) $t=5$ o $t=2$

3) a) 2 b) 7 c) 22 d) 28

4) a) 10 b) -169 c) -26 d) -119

5) -102

EJERCICIOS PARTE II

1) Se suma la segunda columna a la tercera columna y después se saca el factor común de la tercera columna, para obtener

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot 0 = 0$$

2) a) 16 b) -8

3) 4

4) a) $\det(A)=0$ b) $\det(B)=0$ c) $\det(C)=-120$

5) a) -4 b) -131

6) $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{5}$.

EJERCICIOS PARTE III

1) a) $x_1=3$, $x_2=1$ b) $x_1=0$, $x_2=\dfrac{5}{3}$ c) $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=2$

d) $x_1=\dfrac{37}{9}$, $x_2=-\dfrac{19}{6}$, $x_3=\dfrac{13}{18}$.

2) a) -135 b) -103 c) -31

3) a) -1 b) $(adjA)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ c) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

4) $(adjA)=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = A$

5) a) 7 unidades cuadradas. b) 2 unidades cuadradas.

6) a) 2 unidades cúbicas. b) 18 unidades cúbicas.

POSPRUEBA

En cada ejercicio, seleccione la respuesta correcta.

1) Una solución del sistema $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ es

a) $(2,-1,2)$

b) $(-2,-1,2)$

c) $(2,1,-2)$

d) $(2,-1,-2)$

2) La matriz aumentada del sistema $\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 4 = 2x_1 \\ x_1 + 5x_2 = 3 - x_3 \\ 2x_1 - 8 = 2x_2 - x_3 \end{cases}$ es

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & -8 & -2 & -1 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & -8 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right]$

3) La representación matricial del sistema $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$ es

a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$

4) Al resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ -3x_1 + x_2 = -18 \end{cases}$, el valor de la variable x_2 es

a) -3

b) 3

c) 5

d) -5

5) El valor de la variable x_3 al resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -30 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 28 \end{cases}$ es

a) 3

b) -4

c) -3

d) 4

6) Cuál de las siguientes matrices está en forma escalonada reducida?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

7) Si la matriz escalonada reducida de un sistema de ecuaciones lineales tiene la forma

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$, entonces el sistema

a) Tiene solución única.

b) No tiene solución.

c) Tiene infinitas soluciones.

d) No se puede determinar el tipo de solución.

8) Al evaluar el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$ se obtiene

a) -3

b) 27

c) -27

d) 3

9) Al evaluar el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ se obtiene

a) 116

b) 32

c) 22

d) -64

10) Si $(\det A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ y $(\det B) = \begin{vmatrix} 3 & (4+(3)(2)) \\ -1 & (5+(-1)(2)) \end{vmatrix}$ entonces

a) $(\det B) = (\det A) + 2$

b) $(\det B) = (\det A)$

c) $(\det B) = 2(\det A)$

d) $(\det B) = -(\det A)$

11) Al usar la Regla de Cramer para resolver el sistema $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$, el valor

de la variable x_2 se obtiene evaluando la expresión

a) $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}$

b) $\dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}$

c) $\dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}$

d) $\dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}$

RESPUESTAS DE LA PREPRUEBA

1) b
2) c
3) a
4) d
5) b
6) d
7) c
8) a
9) c
10) b
11) a

RESPUESTAS DE LA POSPRUEBA

1) a
2) d
3) b
4) a
5) c
6) d
7) b
8) c
9) a
10) b
11) c

REFERENCIAS

1. Elementary Matrix Algebra
   Franz E. Hohn
   Second Edition
   The MacMillan Company, New York, 1965

2. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times
   Morris Kline
   Oxford University Press, 1972

3. Matrices Definidas Positivas
   Esperanza Vélez, 1988

4. Matrices and Linear Algebra
   Hans Schneider/George Phillip Barker
   Second Edition
   Dover Publications, Inc., 1989

5. Linear Algebra
   Quick Review
   Jerry Bobrow
   Wiley Publishing, Inc., 1996

6. Beginning Linear Algebra
   Seymour Lipschutz
   McGraw Hill, 1997

7. Linear Algebra with Applications
   Seventh Edition

Steven J. Leon
Pearson/ Prentice Hall, 2006

8. Algebra and Trigonometry
Seventh Edition
Michael Sullivan
Prentice Hall, 2006

9. Mathematical Analysis
for Business, Economics, and the Life and Social Sciences
Twelfth Edition
Ernest F. Haeussler, Jr./Richard S. Paul/Richard J. Wood
Prentice Hall, 2008