TALLER 1:
CONOCIENDO LOS NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES

(para maestros de décimo a duodécimo grado)

Universidad de Puerto Rico en Bayamón
Departamento de Matemáticas

Preparado por:
Prof. José La Luz, Ph.D.

PRE-PRUEBA

1) Si A={3,4,5,6,7,...}, B={2,4,6} y C={3,5,7} determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos:

a) $11 \in B$

b) $B \subset A$

c) $A \subseteq A$

d) $C \not\subseteq A$

2) Para los conjuntos A={2,4,6,...8,10}, B={...,-5,-3-1,1,3,5,7,...} y C={-2,-1,1,3,4,5,6,...} realice las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$

b) $A \cap C$

c) $B \cap C$

3) Determine si los siguientes números son racionales o irracionales:

a) .3422123123123...

b) .10110111001111...

c) $\frac{11}{9}$

4) Encuentre la representación como fracción de los siguientes números:

a) .555

b) $.\overline{31}$

c) $.5\overline{1}$

5) Indique cuáles axiomas de los números reales se usaron para realizar las siguientes operaciones:

a) 3+(2+1)=(3+2)+1

b) 2(3+4)=(3+4)2

6) Simplifique usando el orden de las operaciones.

a) $[-2+(2-3)]^2(-2)$

b) $3[2+(-3-4)]^{-1}$

7) Simplifique:

a) $[-3-4][2-(-3)]$

b) $-3\left[-25\left(\frac{-3}{-5}\right)\right]$

8) Determine cuál de los axiomas de orden se usa para justificar los siguientes enunciados:

a) Si $2<3$, entonces $4<5$.

b) Si $2<3$, entonces $8<12$.

9) Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\frac{-3(-3)^2}{9^2}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$

10) Determine si los siguientes números son primos o compuestos:

a) 111

b) 213

11) Factorice los siguientes números:

a) 1,220

b) 3,641

12) Encuentre el divisor común mayor de los siguientes pares de números:

a) 36 y 48

d) 213 y 27

e) 40, 100 y 125

13) Encuentre el múltiplo común menor de los siguientes pares de números:

a) 36 y 48

b) 213 y 27

c) 40, 100 y 125

14) Simplifique:

a) $\sqrt[3]{-8}$

b) $4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

c) $-5\sqrt[4]{7} + 2\sqrt[4]{7}$

d) $2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[4]{3}$

e) $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$

15) Simplifique:

a) $8^{\frac{2}{3}}$

b) $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{3}}\right)\left(4^{\frac{3}{2}}\right)}{16^{\frac{5}{4}}}$

16) Racionalice los denominadores de los siguientes números:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

OBJETIVOS

Al finalizar el taller los participantes deberán:

1) identificar los símbolos básicos de conjuntos.
2) realizar operaciones básicas con conjuntos.
3) definir los diferentes subconjuntos que componen los números reales.
4) reconocer qué axiomas, definiciones y teoremas se utilizan para demostrar una proposición.
5) conocer la diferencia entre los números racionales y los números irracionales.
6) cambiar un decimal periódico a fracción y viceversa.
7) saber diferenciar entre números primos y números compuestos.
8) saber calcular el múltiplo común menor y el divisor común mayor.
9) realizar operaciones con fracciones.
10) realizar operaciones con radicales.
11) simplificar expresiones con radicales.
12) racionalizar el denominador de una expresión con radicales.
13) simplificar números con exponentes racionales.

JUSTIFICACIÓN

Los números reales forman la base de la aritmética. Y esta rama de la matemática es fundamental para entender el álgebra. Es por esto que un entendimiento profundo de este tema facilita temas más avanzados. En este módulo repasaremos los conceptos fundamentales de los números reales desde una perspectiva más teórica. El taller debe clarificar conceptos que quizás no haya estudiado en detalle.

REPASO DE CONJUNTOS

DEFINICIÓN: Un conjunto es una colección de objetos. Los miembros del conjunto se conocen como elementos. Si A y B son conjuntos y todos los elementos de A están en B entonces decimos que A es subconjunto de B.

NOTACIÓN: Usualmente los conjuntos se denotan con letras mayúsculas A, B, C, etc. y los elementos se denotan con letras minúsculas a, b, c, etc. Si a es un elemento de A se denota por $a \in A$ y si a no es elemento de A escribimos $a \notin A$. Si A es un subconjunto de B, escribimos $A \subseteq B$ y si A no es subconjunto de B escribimos $A \nsubseteq B$. El conjunto que no tiene elementos se conoce como el conjunto vacío y se denota por $\varnothing$.

DEFINICIÓN: Sean A y B conjuntos. Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$ decimos que A es un subconjunto propio de B y escribimos $A \subset B$.

EJEMPLOS:

Si $A=\{2,3,...\}$, $B=\{2,4,6,...\}$ y $C=\{1,3,5,7,...\}$ determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos:

a) $5 \in B$

Como 5 no es un elemento de B el enunciado es falso.

b) $B \subseteq A$

Todos los elementos de B son elementos de A, por lo tanto es cierto.

c) $B \subset A$

Como $B \subseteq A$ y $A \neq B$, el enunciado es cierto.

d) $10 \in A$

Como 10 es un elemento de A el enunciado es cierto.

e) $A \subset C$

Como el elemento 6 pertence a A pero no a C el enunciado es falso.

1. EJERCICIOS:

Determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos:

a) $2 \in B$

b) $C \subseteq B$

c) $31 \in C$

d) $A \subset C$

e) $1 \in \varnothing$

f) $3 \notin B$

g) $C \not\subseteq A$

DEFINICIÓN: Si A y B son conjuntos, se define la unión de A y B como el conjunto que contiene todos los elementos de A y B. La intersección de A y B es el conjunto que contiene los elementos que son comunes a A y B.

NOTACIÓN: La unión de A y B se denota por $A \cup B$ y la intersección por $A \cap B$.

EJEMPLOS:

Para los conjuntos $A=\{1,2,4,5,7\}$, $B=\{2,4,9\}$ y $C=\{3,6,9,12,15,...\}$ realice las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$

Los elementos que son de A o de B son 1,2,4,5,7,9, por lo tanto $A \cup B = \{1,2,4,5,7,9\}$.

b) $A \cap B$

El único elemento que es común a A y B es 4, por lo tanto $A \cap B=\{2,4\}$.

2. EJERCICIOS:

Con la información del ejemplo anterior halle:

a) $A \cap C$

b) $B \cup C$

c) $A \cup \varnothing$

d) $(A \cup B) \cap C$

e) $(A \cap C) \cup B$

LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales, que describiremos más adelante, contiene varios subconjuntos importantes. A continuación se muestra un resumen de cada uno de éstos:

I. Los números naturales:

$$\{1,2,3,...\}$$

Este es el conjunto de los números que usamos para contar. Este conjunto se denota con el símbolo **N**.

II. Los números cardinales:

$$\{0,1,2,3,...\}$$

El conjunto de estos números de denota con el símbolo $\mathbf{N}_0$.

III. Los números enteros:

$$\{...,-2,-1,0,1,2...\}$$

El conjunto de estos números se denota con el símbolo **Z**.

IV. Los números racionales: estos números son los números que se pueden expresar como fracciones, son todos los números que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$ donde $a,b \in \mathbf{Z}$ y $b \neq 0$.

EJEMPLOS:

a) -2

b) $-\frac{1}{5}$

c) 0

d) $\frac{5}{11}$

El conjunto de estos números se denota con el símbolo **Q**. Este conjunto también se puede describir como el conjunto de todos los números que pueden ser escritos como decimales periódicos, esto es, los decimales que se repiten. Para encontrar la representación de $\frac{a}{b}$ sólo tenemos que llevar a cabo la división $a \div b$.

EJEMPLOS:

Reescriba los números en el ejemplo anterior como un decimal periódico:

a) –2

–2= –2.0000...

b) $-\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{5}$= -.2000...

c) 0

0.00...

d) $\frac{5}{11}$

$\frac{5}{11}$=.454545...

NOTACIÓN:

Podemos representar el período de un decimal con una barra.

EJEMPLOS:

a) –2

$-2 = -2.000... = -2.\overline{0}$

b) 0

$0 = 0.000... = 0.\overline{0}$

c) $\frac{5}{11}$

$\frac{5}{11} = .454545... = .\overline{45}$

También, si tenemos un decimal periódico, podemos convertirlo en fracción.

EJEMPLOS:

Reescriba los siguientes decimales como fracciones:

a) .3

Como tenemos un espacios decimal, dividimos 3 entre 10. Tenemos entonces que

$.3 = \frac{3}{10}$.

b) .08

Como tenemos dos espacios decimales, dividimos 08=8 entre 10x10=100. Tenemos entonces $.08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$.

c) 3.41

Como tenemos dos espacios decimales, dividimos 341 entre 10x10=100. Tenemos entonces $3.41 = \frac{341}{100}$.

3. EJERICIOS:

Reescriba los siguientes decimales como fracciones:

a) 1.223

b) .6632

c) 5.45

En el caso en que el decimal sea periódico infinito, tenemos que usar otro método para escribirlo como fracción. La idea es cancelar el decimal infinito con otro número con la misma parte decimal.

EJEMPLOS:

a) $.\overline{4}$

Como $.\overline{4}$ =.444... dejamos que x=.444... Para eliminar la parte periódica multiplicamos x por 10. Entonces tenemos 10x=4.444... Restamos 10x de x:

$$\begin{aligned} 10x &= 4.444... \\ \underline{-x} &\underline{= -.444...} \\ 9x &= 4 \end{aligned}$$

Dividimos entre 9 y tenemos que x=$\frac{4}{9}$. Por lo tanto, $.\overline{4} = \frac{4}{9}$.

b) $.\overline{51}$

Sea x=.515151... Si multiplicamos por 10 obtendríamos 5.1515... y al restarlo de x no se cancelaría la parte decimal. Mejor multiplicamos por 100 para obtener 100x=51.5151... y restamos:

$$\begin{aligned} 100x &= 51.5151... \\ \underline{-x} &\underline{= -.515151...} \\ 99x &= 51 \end{aligned}$$

Luego dividimos entre 99 y obtenemos $x = \frac{51}{99}$. Por lo tanto, $.\overline{51} = \frac{51}{99}$.

4. EJERCICIOS:

Reescriba los siguientes decimales como fracciones:

a) $.\overline{1}$

b) $.\overline{35}$

c) $.83\overline{21}$

El conjunto de los números irracionales es el conjunto de números que no pueden expresarse como un decimal periódico.

EJEMPLOS:

a) $-\sqrt{7}$

b) π

c) $\sqrt[3]{2}$

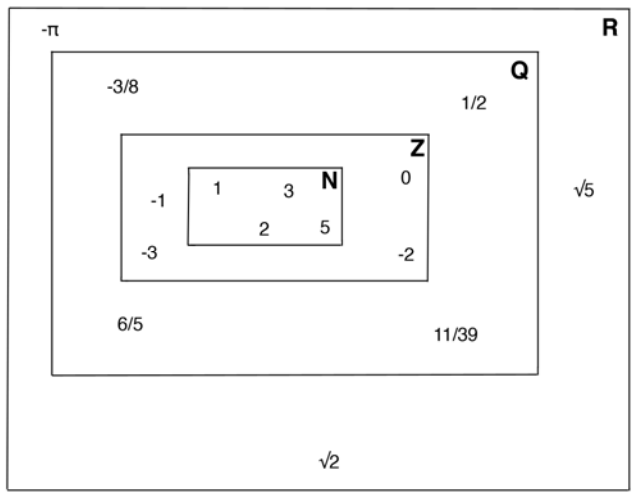
NOTA: No todos los números dentro de radicales son irracionales. Por ejemplo, el número $\sqrt{9}$ es racional debido a que $\sqrt{9} = 3$ (ver sección de radicales).

Denotaremos este conjunto con el símbolo **I**.

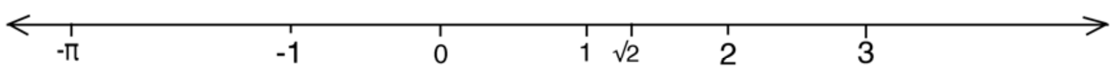
VI. El conjunto de los números reales

Este conjunto es la unión de **Q** con **I** y se denota por **R**.

Podemos representar los conjuntos de los números reales con el siguiente diagrama:



También podemos representar los números reales por medio de una recta. Cada punto en esta recta representa un número real.



A esta recta la llamamos la recta numérica real.

5. EJERCICIOS:

Determine si las siguientes expresiones son ciertas o falsas:

a) $1 \in$ **Q**

b) $-1 \in$ **N**

c) **N** $\cap$ **I**$=\varnothing$

d) **Z** $\subset$ **Q**

e) **Q** $\cup$ **I**=**R**

f) **Q** $\cap$ **I**=**R**

EJEMPLOS:

Determine si los siguientes números son racionales o irracionales:

a) 4

Como podemos escribir 4 como un decimal periódico (4=4.0000...), es racional.

b) .3422123123123

Como podemos escribir .3422123123123 como un decimal periódico (.3422123123123 0000...), el número es racional.

c) $\sqrt{5}$

Cualquier raíz que no sea un número racional es un número irracional.

d) .110110110...

Este es un decimal periódico, por lo tanto es número racional.

6. EJERCICIOS:

Determine si los siguientes números son racionales o irracionales:

a) $\sqrt{4}$

b) .333...

c) .010010001000010000001

d) .010010001000010000001...

e) 1.23221234534343434...

AXIOMAS, DEFINICIONES Y TEOREMAS

Para describir las propiedades básicas de los números reales, tenemos que describir cómo se organiza el estudio de la matemática. Primeramente, tenemos los enunciados que se toman como ciertos. Estos se conocen como axiomas o propiedades. El próximo ejemplo es uno de los axiomas de la geometría:

Dada una recta y un punto que no está en esa recta, existe una única recta en el mismo plano que es paralela a la recta original y pasa por el punto dado.

Las definiciones son conceptos importantes que utilizaremos más adelante. Por ejemplo, esta es una definición de geometría:

Dos rectas son perpendiculares entre sí si forman ángulos congruentes adyacentes.

Todos los enunciados que se deducen a partir de los axiomas, definiciones y enunciados anteriores, se conocen como teoremas. Por ejemplo, un teorema de geometría es:

La suma de los ángulos internos en un triángulo siempre es 180°.

Pero el conjunto de los números reales es más que un conjunto; éste viene equipado con dos operaciones llamadas la suma (+) y la multiplicación (.). Además, podemos comparar cualesquiera dos elementos de este conjunto. En las próximas secciones describiremos los axiomas que rigen las operaciones en **R**.

LOS AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

AXIOMAS DE LA SUMA

Si a, b y c son números reales entonces:

1) Clausura: $a+b$ es un número real
2) Asociativo: $(a+b)+c=a+(b+c)$
3) Conmutativo: $a+b=b+a$
4) Existencia de Unidad (identidad aditiva): Existe un único número real llamado cero y denotado por 0 tal que $0+a=a+0=a$.
5) Opuesto: Para cada a existe un único número llamado el opuesto de a y denotado por $-a$ tal que $a+(-a)=-a+a=0$.

AXIOMAS DE MULTIPLICACIÓN

1) Clausura: ab es un número real
2) Asociativo: $(ab)c=a(bc)$
3) Conmutativo: $ab=ba$
4) Existencia de Unidad (identidad multiplicativa): Existe un único número real llamado uno y denotado por 1 tal que $1a=a1=a$.

5) Recíproco: Para cada $a \neq 0$ existe un <u>único</u> número llamado el recíproco de a y denotado por $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Axioma Distributivo: Si a, b y c son números reales, entonces $a(b+c)=ab+ac$.

EJEMPLOS:

Indique cuáles axiomas se usaron para realizar las siguientes operaciones:

a) 3+(2+1)=(3+2)+1 axioma asociativo de la suma

b) 2(3+4)=(3+4)2 axioma conmutativo de la multiplicación

c) $2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot (4 \cdot 3)$ axioma conmutativo de la multiplicación

7. EJERCICIOS:

a. Indique cuáles axiomas se usaron para realizar las siguientes operaciones:

1) $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

2) 4+(0+3)=4+3

3) 1+0=0+1=1

b. Marque con una *x* los axiomas que se cumplen en los diferentes subconjuntos de los reales

	N	**Z**	**Q**	**I**
existencia de unidad aditiva				
conmutatividad de la multiplicación				
recíproco				

Note que hay muchas propiedades de los números reales que no aparecen como axiomas. Por ejemplo el siguiente enunciado no aparece en los axiomas.

Cualquier número real multiplicado por cero es cero.

Por lo tanto es un enunciado que hay que deducir de los axiomas de los números reales. Es decir, es un teorema.

EJEMPLO:

Determine los axiomas que se utilizaron para probar el siguiente teorema:

TEOREMA 1: Para cualquier número real a,

$$a\cdot 0 = 0$$

PRUEBA: $a\cdot 0 = a\cdot (0+0)$ axioma de la identidad aditiva de la suma

$= a\cdot 0 + a\cdot 0$ axioma distributivo

Debido a que en el axioma de existencia de unidad de la suma este elemento es único, tenemos que $a\cdot 0 = 0$.

8. EJERCICIO:

Determine los axiomas que se utilizaron para probar el siguiente teorema:

TEOREMA 2: Para cualquier número real a

$$-a = (-1)\cdot a$$

PRUEBA:

$a + (-1)\cdot a = 1\cdot a + (-1)\cdot a$	a) ____________________
$= (1 + (-1))\cdot a$	b) ____________________
$= 0\cdot a$	c) ____________________
$= 0$	d) ____________________
Por la unicidad, en el axioma	e) ____________________

tenemos $-a = (-1)\cdot a$.

NOTA: Es importante recordar el orden de las operaciones. El orden de las operaciones es:

1) Las operaciones dentro de paréntesis y/o corchetes de adentro hacia afuera.

2) Los exponentes.

3) La multiplicación y la división de izquierda a derecha.

4) La suma y la resta de izquierda a derecha.

EJEMPLOS:

Simplifique usando el orden de las operaciones.

a) [2+(2-3)](-2)

[2+(2-3)](-2)=(2-1)(-2)=(1)(-2)=-2

b) $5-4\cdot 2^3$

$5-4\cdot 2^3=5-4\cdot 8=5-32=-27$

9. EJERCICIOS:

Simplifique usando el orden de las operaciones.

a) [2-(2-1)3][2+(-3-4)]

b) $3(1-3\cdot 2^2)$

DEFINICIÓN: Si a y b son números reales, entonces definimos:

1) La resta: $a-b=a+(-b)$

2) La división: $\frac{a}{b}=a\div b=ab^{-1}$

EJEMPLOS:

a) $3-4=3+(-4)$

b) $\frac{3}{4}=3(4^{-1})$

TEOREMA 3: Si $a,b\in$ **R** entonces

1) –0=0

2) $(-a)b=a(-b)=-(ab)$

3) $(-a)(-b) = ab$

4) $-(-a) = a$

5) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

EJEMPLOS:

Simplifique:

a) $2-(-3)$

$2-(-3) = 2+[-(-3)] = 2+3$

b) $\dfrac{-3}{-5}$

$\dfrac{-3}{-5} = \dfrac{-(-3)}{5} = \dfrac{3}{5}$

10. EJERCICIOS:

Simplifique:

a) $-[-(-3)-(-2)]$

b) $\left\lfloor \dfrac{-3}{-(-5)} \right\rfloor (-1)$

NOTA: Es importante notar que de lo discutido anteriormente se puede deducir por qué el número cero no tiene recíproco (no es posible dividir por cero). Si cero tuviera recíproco, entonces $0 \cdot 0^{-1} = 1$ por el axioma del recíproco de la multiplicación. Pero por el teorema 1 tenemos que $0 \cdot 0^{-1} = 0$. Por lo tanto 0=1, lo cual es una contradicción.

ORDEN

DEFINICIÓN: Si $a,b \in$ **R**, decimos que *a* es menor que *b* si *b-a* es positivo.

EJEMPLOS:

Determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos usando la definición:

a) 3<4

Debido a que 4-3=1 es positivo, por la definición, es cierto.

b) $5<1$

Debido a que $1-5=-4$ es negativo, es falso.

Al igual que los axiomas de los números reales rigen el comportamiento de la suma y la multiplicación, los axiomas de orden rigen la interacción entre esta relación con ella misma, la suma y la multiplicación.

AXIOMAS de ORDEN

Si a, b y c son números reales entonces:

1) (aditividad) Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$.
2) (transitividad) Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.
3) (multiplicatividad) Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ac<bc$.

EJEMPLOS:

Determine cuál axioma de orden se usa para justificar los siguientes enunciados:

a) Si $2<3$ entonces $4<5$. axioma de aditividad del orden

b) Si $2<3$ entonces $8<12$. axioma de la multiplicatividad del orden

11. EJERCICIOS:

Determine cuál axioma de orden se usa para justificar los siguientes enunciados:

a) Si $3<4$ y $4<10$ entonces $3<10$.

b) Si $-1<0$ entonces $-3<-2$.

c) Si $2<5$ entonces $10<25$.

¿Qué ocurre con el axioma de la multiplicactividad de orden si $c<0$?

TEOREMA 4: Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac>bc$.

En otras palabras, al multiplicar por un número negativo, el orden se invierte. Esto es, cambia el sentido de la desigualdad.

EJEMPLO:

a) Si $3<5$, entonces $3(-2)>5(-2)$, esto es $-6>-10$.

NOTACIÓN: La expresión $a\leq b$ quiere decir $a<b$ o $a=b$. Por lo tanto, sería incorrecto escribir $4<4$ pero sería correcto escribir $4\leq 4$. Los axiomas de orden tendrían un equivalente usando el símbolo $\leq$.

EXPONENTES

DEFINICIÓN: Si $a \in$ **R** y $n \in$ **N** entonces a^n es *a* multiplicado por el mismo *n* veces.

EJEMPLOS:

Simplifique los siguientes números:

a) $2^2=(2)(2)=4$

b) $(-3)^2=(-3)(-3)=9$

c) $-3^2=-[(3)(3)]=-9$

12. EJERCICIOS:

Simplifique los siguientes números:

a) 4^2

b) $(-2)^4$

c) -3^3

TEOREMA 5: Si $a,b \in \mathbf{R}$, $a,b\neq 0$ y $m, n \in \mathbf{N}_0$ entonces

1) $a^0=1$

2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $(ab)^m = a^m b^m$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

6) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

7) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

EJEMPLOS:

Simplifique:

a) 3^0

Por la parte 1 del teorema tenemos que $3^0=1$.

b) $(2^2)^2$

Usando la parte 3 del teorema tenemos que $(2^2)^2=2^4=16$.

c) $(2\cdot 3)^2$

Usando la parte 4 del teorema tenemos que $(2\cdot 3)^2 = 2^2\cdot 3^2 = 4\cdot 9 = 36$.

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

Usando la parte 5 del teorema tenemos que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$.

e) $\dfrac{2^{10}}{2^6}$

Usando la parte 6 del teorema tenemos que $\dfrac{2^{10}}{2^6} = 2^{10-6} = 2^4 = 16$.

f) $\dfrac{2^6}{2^{10}}$

Combinando las partes 6 y 7 del teorema tenemos que $\dfrac{2^6}{2^{10}} = 2^{6-10} = 2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$.

13. EJERCICIOS:

Simplifique:

a) $(-5)^4$

b) $(5\cdot 6)^2$

c) $[(-2)\cdot 3]^3$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$

e) $\dfrac{2^3 \cdot 5^2}{4^3 \cdot 25}$

15. EJERCICIO:

Determine los axiomas, definiciones y teoremas que se utilizaron para probar el siguiente teorema:

*TEOREMA 6:*Si $a \in$ **R**, entonces

$$a^2 \geq 0$$

PRUEBA: Si a=0 entonces la aseveración es cierta. Suponga que a>0, entonces:

Si $a \geq 0$ entonces

$a \cdot a \geq a \cdot 0$	a)________________________
$a^2 \geq a \cdot 0$	b)________________________
$a^2 \geq 0$	c)________________________

Si a<0, entonces

$a < 0$	
$-a > -0$	d)_______________________
$-a > 0$	e)_______________________

Por lo tanto

$(-a)(-a) > (-a) \cdot 0$	f)_______________________
$(-a)(-a) > 0$	g)_______________________
$a \cdot a > 0$	h)_______________________
$a^2 > 0$	i)_______________________

NOTA: El teorema 6 también es cierto si cambiamos el exponente por cualquier número par.

NÚMEROS PRIMOS, COMPUESTOS Y FACTORIZACIÓN

DEFINICIÓN: Sean $a,b \in$ **N**. Decimos que a divide a b si existe un único número cardinal q tal que $b=aq$.

NOTACIÓN: Si a divide b entonces escribimos $a|b$ y decimos que a es un divisor o un factor de b.

EJEMPLOS:

Determine si los siguientes enunciados son ciertos y explique por qué:

a) $2|4$

Cierto, porque $4=2(2)$.

b) $6|24$

Cierto, porque $24=6(4)$.

15. EJERCICIOS:

Determine si los siguientes enunciados son ciertos y explique por qué:

a) $4|5$

b) $1|3$

c) $2|0$

d) $0|0$

DEFINICIÓN: Un número es primo si tiene sólo dos divisores. Si un número tiene más de dos divisores, entonces se conoce como compuesto.

NOTA: Para determinar si un número n es compuesto, es suficiente encontrar un primo p tal que $p^2<n$ y $p|n$.

EJEMPLOS:

Determine si los siguientes números son primos o compuestos:

a) 3

El número 3 es primo porque los únicos números que dividen a 3 son el 1 y el 3.

b) 4

El número 4 es compuesto porque tres números dividen a 4 (1,2,4)

c) 31

Usamos la nota anterior para determinar si 31 es primo o compuesto. Los al elevar al cuadrado los números primos 2,3 y 5 se obtienen números menores que 31. Pero como ninguno de estos es factor de 31, el número 31 es primo.

d) 87

Al elevar al cuadrado los números primos 2,3,5,7 se obtienen números menores que 87. Pero como 3|87, este número es compuesto.

Usando el método de la nota anterior, tenemos que los primos menores de 100 son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

16. EJERCICIOS:

Determine si los siguientes números son primos o compuestos:

a) 111

b) 113

c) 237

d) 8,633

NOTA: El número 1 no es ni primo ni compuesto. Esto es debido a que sólo tiene un divisor (1). También es importante señalar que 2 es el único número primo que es par.

TEOREMA 7: Cualquier número natural mayor que 1, puede ser escrito de forma única como un producto de números primos.

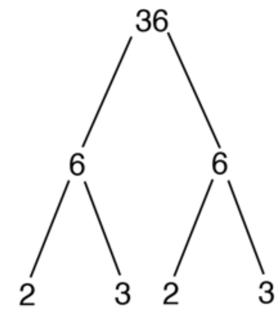
NOTA: Escribir un número como producto de primos se conoce como factorizar el número. Para lograr esto podemos usar un diagrama de árbol.

EJEMPLOS:

Factorice los siguientes números:

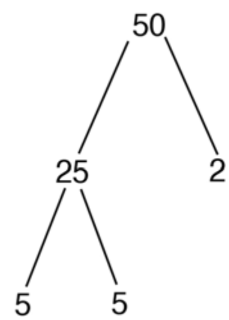
a) 3=3 (es primo)

b) 36



$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

c) 50



$$50 = 2 \cdot 5^2$$

17. EJERCICIOS:

Factorize los siguientes números:

a) 45

b) 19

c) 88

d) 407

e) 1,919

DEFINICIÓN: Si $a, b \in$ **N,** definimos el divisor común mayor de a y b como el número $c \in$ **N** con las siguientes propiedades:

1) $c|a$ y $c|b$.

2) Si $d \in \mathbf{N}$ tal que $d|a$ y $d|b$ entonces $d|c$.

En otras palabras, es el número natural más grande que divide a y b.

NOTACIÓN: El divisor común mayor de a y b se denota por dcm(a,b) (gcd(a,b) en inglés).

Para encontrar dcm(a,b) primero factorizamos a y b, luego escribimos los números primos que sean comunes a ambas factorizaciones multiplicados entre sí y finalmente escribimos la potencia más pequeña de los números primos comunes.

EJEMPLOS:

Encuentre el dcm de los siguientes pares de números:

a) 2 y 4

Como $2=2^1$ y $4=2^2$, entonces $\text{dcm}(2,4)=2^1=2$.

b) 6 y 27

Como $6=2(3)$ y $27=3^3$, entonces $\text{dcm}(6,27)=3$.

c) 36 y 54

Como $36=2^2 3^2$ y $54 = 2\cdot 3^3$, entonces $\text{dcm}(36,54)= 2\cdot 3^2$.

18. EJERCICIOS:

Encuentre el dcm de los siguientes pares de números:

a) 12 y 15

b) 10 y 27

c) 110 y 70

d) 216, 27 y 81

DEFINICIÓN: Si $a,b \in$ **N,** definimos el múltiplo común menor de a y b como el número $c \in \mathbf{N}$ con las siguientes propiedades:

1) $a|c$ y $b|c$.

2) Si $d \in \mathbf{N}$ tal que $a|d$ y $b|d$ entonces $c|d$.

En otras palabras, el múltiplo común menor es el número más pequeño que es divisible por a y b.

NOTACIÓN: El múltiplo común menor de a y b se denota por mcm(a,b) (lcm(a,b) en inglés).

Para encontrar mcm(a,b) primero factorizamos a y b, luego escribimos todos los números primos diferentes que aparezcan en ambas factorizaciones multiplicados entre sí y finalmente escribimos la potencia más grande de todos los números primos.

EJEMPLOS:

Encuentre el mcm de los siguientes pares de números:

a) 2 y 4

Como $2=2^1$ y $4=2^2$, entonces mcm(2,4)=2^2=4.

b) 6 y 27

Como $6 = 2 \cdot 3$ y $27=3^3$, entonces mcm(6,27)= $2 \cdot 3^3 = 54$.

c) 36 y 54

Como $36 = 2^2 \cdot 3^2$ y $54 = 2 \cdot 3^3$, entonces mcm(36,54)= $2^2 \cdot 3^3$=108.

19. EJERCICIOS:

Encuentre el mcm de los siguientes pares de números:

a) 12 y 15

b) 10 y 27

c) 110 y 70

d) 216, 27 y 81

NOTA: Podemos usar el mcm para sumar dos fracciones con denominadores diferentes. El denominador común de dos fracciones es el mcm de los denominadores.

EJEMPLOS:

Sume las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

Como mcm(2,4)=4 el denominador común es 4. Entonces

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

b) $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}$

Como mcm(4,6)=12 tenemos

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right)=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{11}{12}$$

20. EJERCICIOS:

Sume las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{3}+\frac{1}{5}$

c) $\frac{9}{100}-\frac{1}{60}$

d) $\frac{1}{60}-\frac{7}{45}$

RADICALES

DEFINICIÓN: Sea $a \in$ **R**. Entonces decimos que b es <u>una</u> raíz enésima de a si $b^n=a$ para $n \in$ **N** y $n\geq 2$. Definimos la raíz enésima principal de a por $\sqrt[n]{a}$ y la definimos de la siguiente manera:

1) $\sqrt[n]{a}$ es una raíz enésima de a.

2) Si $a>0$, entonces $\sqrt[n]{a}>0$.

3) Si $a<0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}<0$.

4) Si $a<0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no está definido para el conjunto de los números reales.

5) Si a=0, entonces $\sqrt[n]{a}=0$.

NOTA: En la expresión $\sqrt[n]{a}$, decimos que *a* es el radicando y *n* es el índice.

EJEMPLOS:

Encontrar las raíces de los siguientes números:

a) $\sqrt[n]{0}$

Por la parte 5 de la definición, tenemos que $\sqrt[n]{0}=0$.

b) $\sqrt{4}$

Como $2^2=4$ tenemos que $\sqrt{4}=2$. Observe también que $(-2)^2=4$, por lo que –2 es una raíz cuadrada de 4. Pero por la parte 2 de la definición, no es la raíz cuadrada principal.

d) $\sqrt[3]{-8}$

Como $(-2)^3= -8$ y por la parte 3 de la definición tenemos que $\sqrt[3]{-8}=-2$.

e) $\sqrt{-4}$

Por la parte 5 de la definición, $\sqrt{-4}$ no existe. También podemos ver esto debido a que por el teorema 4 no hay un número real *a* tal que $a^2=-4$.

21. EJERCICIOS:

Encontrar raíces de los siguientes números:

a) $\sqrt{16}$

b) $\sqrt[4]{16}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt{64}$

NOTA: Debido a que $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ $n>1$, tenemos que $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ (cuando n>1).

DEFINICIÓN: Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

EJEMPLOS:

Determine si las siguientes radicales son semejantes:

a) $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

Como tienen el mismo índice (*n=2*) y el mismo radicando (2) entonces son radicales semejantes.

b) $\sqrt[4]{5}$ y $\sqrt[3]{5}$

Aunque los radicandos son iguales (5), como los índices son diferentes, estos radicales no son semejantes.

22. EJERCICIOS:

Determine si los siguientes radicales son semejantes:

a) $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt{3}$ y $5\sqrt{3}$

TEOREMA 8: Si los radicales son semejantes entonces:

$$b\sqrt[n]{a}+c\sqrt[n]{a}=(b+c)\sqrt[n]{a}$$

EJEMPLOS:

Cuando sea posible, realice las siguentes operaciones:

a) $4\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=(4-2)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

b) $-5\sqrt[4]{7}+2\sqrt[4]{7}$

$-5\sqrt[4]{7}+2\sqrt[4]{7}=(-5+2)\sqrt[4]{7}=-3\sqrt[4]{7}$

c) $2\sqrt[5]{3}-2\sqrt[4]{3}$

Los radicales no son semejantes, por lo tanto no se pueden sumar.

23. EJERCICIOS:

Cuando sea posible, realice las siguientes operaciones:

a) $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

b) $-5\sqrt[3]{5}-8\sqrt[3]{5}$

c) $2\sqrt[5]{3}-\frac{2}{3}\sqrt[5]{3}$

TEOREMA 9: Si *a* y *b* son números con raíz enésima, entonces:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ cuando $b \neq 0$

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

Para simplificar un radical, reescribimos el radicando de manera que tengamos un producto de números donde uno de ellos tenga una raíz principal entera. Luego usamos la parte 1 del teorema 9.

EJEMPLOS:

Simplifique:

a) $\sqrt{18}$

Como $18 = 9 \cdot 2$, entonces $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

Usando la parte 2 del teorema 9 tenemos $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$

Usando el axioma distributivo y la parte 1 del teorema 9 tenemos

$$\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} + \sqrt[3]{2 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4} = 2 + \sqrt[3]{4}$$

d) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{2} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 + \sqrt{6} + \sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

24. EJERCICIOS:

Simplifique:

a) $\sqrt{32}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

c) $\sqrt[4]{8}\left(2+\sqrt[4]{2}\right)$

d) $\left(5+\sqrt{3}\right)^2$

RACIONALIZACIÓN DEL DENOMINADOR

Cuando tenemos números en donde el denominador consiste de números con radicales, es conveniente simplificar el denominador, esto es, expresar el denominador como un número racional. A este procedimiento se le conoce como racionalizar. Logramos esto usando la parte 3 del teorema 9.

EJEMPLOS:

Racionalice el denominador de los siguientes números:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Como $\sqrt{3}\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

$$\frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

c) $\dfrac{10}{\sqrt{8}}$

$$\frac{10}{\sqrt{8}}=\frac{10}{\sqrt{4\cdot 2}}=\frac{10}{\sqrt{4}\sqrt{2}}=\frac{10}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

25. EJERCICIOS:

Racionalice el denominador de los siguientes números:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$

DEFINICIÓN: El conjugado de $c\sqrt{a}+d\sqrt{b}$ es $c\sqrt{a}-d\sqrt{b}$.

EJEMPLOS:

Encuentre el conjugado de los siguientes números:

a) $1+\sqrt{2}$

El conjugado de $1+\sqrt{2}$ es $1-\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

El conjugado de $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ es $\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

c) $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$

El conjugado de $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$ es $3\sqrt{5}+2\sqrt{3}$.

26. EJERCICIOS:

Encuentre el conjugado de los siguientes números:

a) $3-\sqrt{6}$

b) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{7}+4\sqrt{11}$

Para los casos en que tenemos expresiones de la forma $a+b$ multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado de $a+b$.

EJEMPLOS:

Racionalice el denominador de los siguientes números:

a) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)=\frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\cdot 1+(1+\sqrt{3})(-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{1-3}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{-2}=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}-\sqrt{6}-2}=\frac{2+\sqrt{6}}{3-2}=\frac{2+\sqrt{6}}{1}=2+\sqrt{6}$$

27. EJERCICIOS:

Racionalice el denominador de los siguientes números:

a) $\dfrac{-2}{4-\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{11}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$

EXPONENTES RACIONALES

DEFINICIÓN: Sea $a\in \boldsymbol{R}$, m,n$\in$ $\boldsymbol{N}$. Entonces $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

EJEMPLOS:

Simplifique:

a) $4^{\frac{1}{2}}$

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b) $8^{\frac{2}{3}}$

$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

28. EJERCICIOS:

Simplifique:

a) $81^{\frac{1}{4}}$

b) $-32^{\frac{2}{5}}$

c) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

*NOTA:*El teorema 5 (reglas de exponentes) es cierto también para exponentes racionales.

EJEMPLOS:

Use las reglas de exponentes para simplificar:

a) $\left(\sqrt[10]{25}\right)^5$

$\left(\sqrt[10]{25}\right)^5 = \left(25^{\frac{1}{10}}\right)^5 = 25^{\left(\frac{1}{10}\right)5} = 25^{\frac{5}{10}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

b) $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}}$

$\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}}$

$$\frac{8^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{8^2}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2$$

d) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}=\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=64^{\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}}=64^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}=2$$

29. EJERCICIOS:

Use las reglas de exponentes para simplificar:

a) $\sqrt[7]{5^{14}}$

b) $32^{.2}$

c) $64^{\frac{1}{3}}\cdot 64^{\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}}$

EJERCICIOS ADICIONALES

1) Si A={1,3,4,5,6,7,...}, B={2,4,6,8,...} y C={...,3,5,7} determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos:

a) $100 \in B$

b) $B \subset A$

c) $A \subseteq A$

d) $C \not\subseteq A$

2) Para los conjuntos A={...,-16,-12,-8,-4,0,4,8,...}, B={2,4,6,8} y C={-4,4,7,9} realice las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$

b) $B \cup C$

c) $A \cap C$

d) $(A \cap B) \cap C$

e) $(A \cap B) \cup (C \cap B)$

3) Determine si los siguientes números pertenecen a **Q**:

a) 5.12112111211112...

b) .10101010011

c) 1.101010...

b) 0

4) Encuentre la representación como fracción de los siguientes números:

c) .505

d) $.\overline{311}$

e) $.523\overline{21}$

5) Indique cuáles axiomas de los números reales se usaron para realizar las siguientes operaciones:

a) 3+(2+1)=(3+2)+1

b) 2(3+4)=2(4+3)

6) Simplifique:

a) $\dfrac{[2-(-3)]^4}{(-25)^3}$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^4$

c) $\frac{(-3)^2\cdot 4^3\cdot 6^2}{2^4\cdot 9\cdot 5}$

7) Factorice los siguientes números:

a) 197

b) 546

c) 5,723

8) Encuentre el divisor común mayor y el múltiplo común menor de los siguientes pares de números:

a) 12 y 65

b) 18 y 27

c) 42 y 32

9) Simplifique:

a) $\frac{\left(\sqrt{4}-\sqrt{8}\right)^2}{2+\sqrt{12}}$

b) $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{32}\right)$

c) $(2+\sqrt{10})^2$

d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

10) Enuncie el axioma, la definición o el teorema que se usó para probar el siguiente enunciado:

TEOREMA: Para cualquier número *a*,

$$-(-a)=a$$

PRUEBA:

$-a+-(-a)=0$	a)______________________________
Por la unicidad en el axioma	b)______________________________

tenemos -(-*a*)=*a*.

11) *TEOREMA:* Para cualquier números *a* y *b*

$$(-a)b=a(-b)$$

PRUEBA: $(-a)b=[(-1)a]b$ a)______________________________

$=[a(-1)]b$ b)______________________________

$=a[(-1)b]$ c)______________________________

$=a(-b)$ d)______________________________

12) Simplifique:

a) $(-27)^{-\frac{2}{3}}$

b) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}}$

c) $4^{2.5}$

d) $\dfrac{2}{2^{\frac{1}{3}}}$

POS-PRUEBA

1) Si *A*={2,3,5,6}, *B*={...,7,9,11,13,...} y *C*={2,3,5,6,7,8}, determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos:

a) $1 \in B$

b) $B \subset A$

c) $2 \notin C$

d) $A \not\subset B$

2) Para los conjuntos $A=\{1,2,4,5,7\}$, $B=\{4,9\}$ y $C=\{1,4,9\}$, realice las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$

b) $A \cap C$

c) $(A \cap B) \cup C$

d) $(A \cup C) \cap B$

3) Determine si los siguientes números son racionales o irracionales:

a) 4.111...

b) .34221223457531...

c) –7.121121112

d) –7.121121112...

4) Encuentre la representación como fracción de los siguientes números:

a) .5754

b) $.\overline{42}$

c) $.53\overline{2}$

5) Indique cuáles axiomas de los números reales se usaron para realizar las siguientes operaciones:

a) 3+(2+1)=(3+2)+1

b) 2(3+4)=2(3)+2(4)

6) Simplifique:

a) $[2+(2-3)]^5[7-(4^2-12)]$

b) $\left[2\cdot 3-3\cdot 2^{2}\right]^{2}$

c) $-[-2-(-3)]\left(\dfrac{-4}{5}\right)$

d) $-5\left\lfloor\left(\dfrac{-3}{-5}\right)^{-2}\right\rfloor$

7) Determine cuál de los axiomas de orden se usa para justificar los siguientes enunciados:

a) Si $2<3$ entonces $4<5$.

b) Si $2<3$ entonces $4<6$.

8) Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2^{2}}{4^{\frac{1}{4}}}$

b) $\dfrac{(-8)^{\frac{2}{3}}}{-4^{-2}}$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

d) $\left(\dfrac{5^{4}}{250}\right)^{2}$

9) Factorice los siguientes números:

a) 331

b) 4,389

c) 539

10) Factorice los siguientes números:

a) 135

b) 112

11) Encuentre el dcm de los siguientes pares de números:

a) 68 y 27

b) 36 y 14

12) Encuentre el mcm de los siguientes pares de números:

a) 18 y 27

b) 36 y 14

13) Simplifique:

a) $\left(\sqrt{5}+3\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$

b) $\sqrt{8}-2\sqrt{4}+5\sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

14) Racionalice el denominador de los siguientes números:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$

Respuestas de la pre-prueba

1. a) falso

b) cierto

c) cierto

d) falso

2. a) {...,-5,-3,-1,1,2,3,4,5,...}

b) {4,6,8,10}

c) {1,3,5,7,9,...}

3. a) racional

b) irracional

c) racional

4. a) $\frac{111}{200}$

b) $\frac{31}{99}$

c) $\frac{23}{45}$

5. a) axioma asociativo de la suma

b) axioma conmutativo de la multiplicación

6. a) $-\frac{1}{25}$

b) $-\frac{3}{5}$

7. a) -35

b) 45

8. a) axioma de aditividad del orden

b) axioma de la multiplicatividad del orden

9. a) $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

10. a) compuesto

b) compuesto

11. a) $2^2 \cdot 5 \cdot 61$

b) $11 \cdot 331$

12. a) 12

b) 27

c) 5

13. a) 114

b) 1,917

c) 1,000

14. a) -2

b) $2\sqrt{2}$

c) $-3\sqrt[4]{7}$

d) $2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[4]{3}$

e) $2 + \sqrt[3]{4}$

15. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

Respuestas de los ejercicios en el módulo

1. a) cierto
   b) falso
   c) cierto
   d) falso
   e) falso
   f) cierto
   g) cierto

2. a) {3,5,7,9,...}
   b) ***N***
   c) {1,2,4,5,7}
   d) {9}
   e) *A*

3. a) $\frac{1{,}223}{1{,}000}$
   b) $\frac{829}{1{,}250}$
   c) $\frac{109}{200}$

4. a) $\frac{1}{9}$
   b) $\frac{35}{99}$
   c) $\frac{1{,}373}{165}$

5. a) cierto
   b) falso
   c) cierto
   d) cierto
   e) cierto
   f) falso

6. a) racional
   b) racional
   c) racional
   d) irracional
   e) racional

7. a. 1) recíproco
      2) existencia de unidad
      3) existencia de unidad

   b.

	N	**Z**	**Q**	**I**
existencia de unidad aditiva		x	x	
conmutatividad de la multiplicación	x	x	x	x
recíproco			x	x

8. a) existencia unidad multiplicativa
   b) axioma distributivo
   c) axioma del opuesto de suma
   d) teorema 1
   e) axioma del opuesto de suma

9. a) 5
   b) –33

10. a) -5

b) $\frac{3}{5}$

11. a) transitividad
    b) aditividad
    c) multiplicatividad

12. a) 16
    b) 16
    c) -27

13. a) 625
    b) 900
    c) -216
    d) $\frac{27}{64}$
    e) $\frac{1}{8}$

14. a**)** axioma de multiplicatividad del orden
    b) definición de exponentes
    c) teorema 1
    d) teorema 4
    e) parte 1 del teorema 3
    f) axioma de multiplicatividad del orden
    g) teorema 1
    h) parte 3 del teorema 3
    i) definición de exponentes

15. a) falso
    b) cierto
    c) cierto
    d) falso

16. a) compuesto
    b) primo
    c) compuesto
    d) compuesto

17. a) $3^2 \cdot 5$
    b) 19
    c) $2^3 \cdot 11$
    d) $11 \cdot 37$
    e) $19 \cdot 101$

18. a) dcm(12,15)=3
    b) dcm(10,27)=1
    c) dcm(110,70)=10

19. a) mcm(12,15)=60
    b) mcm(10,27)=270
    c) mcm(110,70)=770

20. a) $\frac{2}{3}$
    b) $\frac{28}{15}$
    c) $\frac{11}{150}$
    d) $-\frac{5}{36}$

21. a) 4

b) 2

c) -3

d) 8

22. a) no son semejantes

b) si son semejantes

23. a) $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

b) $-13\sqrt[3]{5}$

c) $\frac{4}{3}\sqrt[5]{3}$

24. a) $4\sqrt{2}$

b) 2

c) $2\sqrt[4]{8}+2$

d) $28+10\sqrt{3}$

25. a) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

26. a) $3+\sqrt{6}$

b) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{7}-4\sqrt{11}$

27. a) $\frac{-8-2\sqrt{5}}{11}$

b) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{91}-\sqrt{35}-\sqrt{143}+\sqrt{55}}{8}$

28. a) 3

b) -4

c) $\frac{9}{4}$

29. a) 25

b) 2

c) 32

d) 4

Contestaciones de los ejercicios adicionales

1. a) cierto

b) falso

c) cierto

d) cierto

2. a) {...,-8,-4,0,2,4,6,8,...}

b) {-4,2,4,6,7,8,9}

c) {-4,4}

d) {4}

e) {4,8}

3. a) no pertenece

b) pertenece

c) si pertenece

d) si pertenece

4. a) $\frac{101}{200}$

b) $\frac{311}{999}$

c) $\frac{8{,}633}{16{,}500}$

5. a) axioma asociativo de la suma

b) axioma conmutativo de la suma

6. a) 625

b) $-\frac{3}{2}$

c) $\frac{144}{5}$

7. a) 197

b) $3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

c) $41 \cdot 43$

8. a) dcm(12,65)=1, mcm(12,65)=780

b) dcm(18,27)=9, mcm(12,65)=54

c) dcm(42,32)=2, mcm(42,32)=672

9. a) $-3+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

b) $-2-\sqrt[3]{4}$

c) $14+4\sqrt{10}$

d) $\frac{5-\sqrt{15}}{2}$

10. a) axioma de opuesto aditivo

b) axioma de opuesto aditivo

11. a) teorema 2

b) axioma de conmutativo de la multiplicación

c) axioma de asociativo de la multiplicación

d) teorema 2

12. a) $\frac{1}{9}$

b) $\sqrt[4]{64}$

c) 32

d) $\sqrt[3]{4}$

Respuestas de la pos-prueba

1. a) cierto
   b) falso
   c) falso
   d) falso

2. a) {1,2,4,5,7,9}
   b) {4}
   c) {1,4,9}
   d) {4,9}

3. a) racional
   b) irracional
   c) racional
   d) irracional

4. a) $\dfrac{2,877}{5,000}$
   b) $\dfrac{42}{49}$
   c) $\dfrac{479}{400}$

5. a) axioma asociativo de la suma
   b) axioma distributivo

6. a) 3
   b) 36
   c) $\dfrac{4}{5}$
   d) $-\dfrac{125}{9}$

7 a) axioma de suma del orden
   b) axioma multiplicatividad del orden

8. a) $2\sqrt{2}$
   b) -64
   c) $\dfrac{2}{9}$
   d) $\dfrac{25}{4}$

9. a) 331
   b) $3\cdot 7\cdot 11\cdot 19$
   c) $7^2\cdot 11$

10. a) $3^3\cdot 5$
    b) $2^3\cdot 7^2$

11. a) 1
    b) 2

12. a) 54
    b) 252

13. a) $\sqrt{10}-\sqrt{5}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}$
    b) $-4+7\sqrt{2}$
    c) $5+2\sqrt{6}$

14. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{3}-1$