TALLER :

FUNCIONES Y SUS PROPIEDADES (NIVEL SUPERIOR-GRADOS 10 Y 11)

Universidad de Puerto Rico en Bayamón

Departamento de Matemáticas

Preparado por:

Prof. Eileen Vázquez

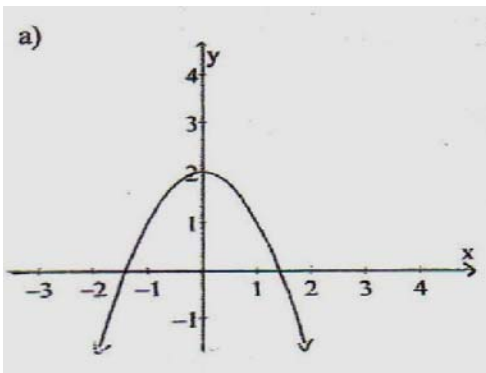
TABLA DE CONTENIDO

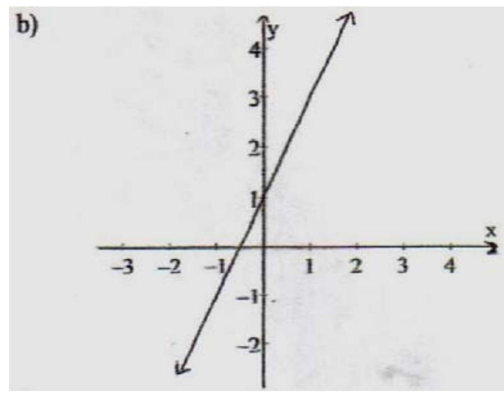
PRE – PRUEBA

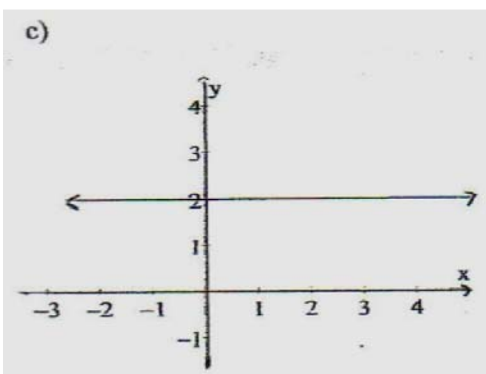
1) ¿Cuáles de las siguientes relaciones representan funciones?

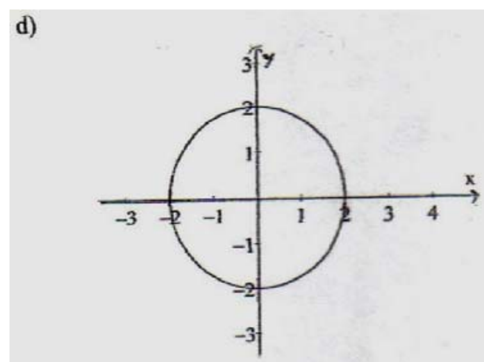
a) $f = \{(2,-2),(-3,3),(4,-4),(-5,5)\}$
b) $g = \{(5,2),(1,3),(5,4)\}$
c) $F = \{(x,y) : |x+4| - y = 0\}$
d) $G = \{(x,y) : (y-1)^2 + (x+7)^2 = 8\}$

2) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones?



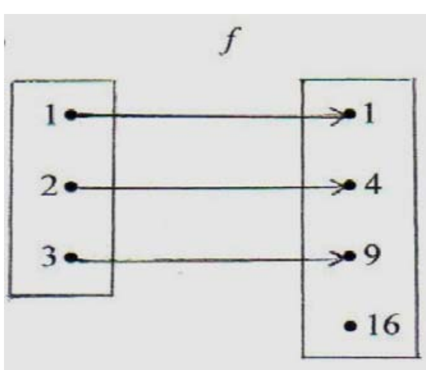




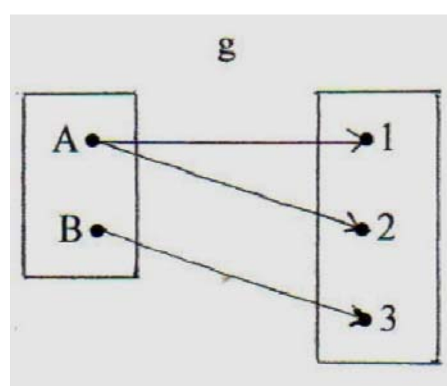


3) ¿Cuáles de las siguientes correspondencias representan funciones?

a)



b)



4) Sea $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Halla:

a) el dominio de f

b) $f\left(\dfrac{-3}{5}\right)$

c) $f\left(\sqrt{3}\right)$

d) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

e) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad h\neq 0$

5) Halla el dominio de las siguientes funciones:

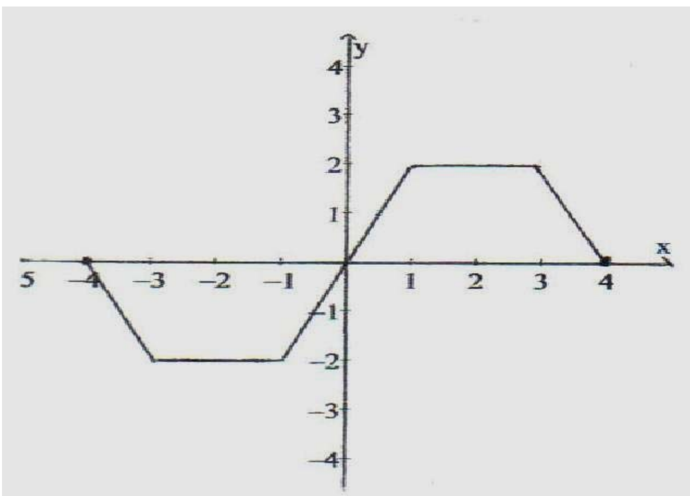
a) $f(x)=x^5-3x^3-\sqrt{2}$

b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-5}$

c) $h(t)=\dfrac{t^2-4t+2}{t^2-5}$

d) $G\ (n)=\dfrac{9\sqrt{n}-5\sqrt[7]{3n+4}}{10}$

6) Usando la gráfica de la función f que aparece a continuación,halla:



a) dominio

b) campo de valores

c) $f(0)$

d) $f(-2)$

e) interceptos en el eje de x

f) intercepto en el eje de y

g) ceros de f

h) simetría de la gráfica (si la tiene)

i) intervalos donde f es:

1) creciente

2) decreciente

3) constante

j) valores de x donde:

1) $f(x)=2$

2) $f(x)<0$

3) $f(x)\geq 0$

7) ¿Cuáles de las gráficas que representan funciones en el ejercicio 2, son funciones uno-a-uno?

8) ¿Cuáles de las gráficas del ejercicio 2 tienen simetría con respecto:

a) al eje de y

b) al origen

9) Usando la prueba algebraica, determina cuáles de las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos:

a) $f(x) = 3x^4 + x^2$

b) $g(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(t) = t^5 - 3t^2 + 1$

d) $n(x) = \dfrac{1}{x^6 + 1}$

10) Halla los interceptos en x y el intercepto en y para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7x + 2$

b) $g(x) = 4$

c) $H(x) = x^2 - 9$

d) $q(x) = 2x^2 - 7x - 4$

e) $m(x) = x^2 + x + 2$

f) $G(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x$

11) Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, halla:

a) $(f + g)(2)$

b) $(f\,g)(3)$

c) $(f - g)(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

e) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

f) dominio de la función $f + g$

g) dominio de la función $\dfrac{f}{g}$

h) dominio de la función $\dfrac{g}{f}$

12) Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:

a) $(f \circ g)(1)$

b) $(f \circ f)(-2)$

c) $(f \circ g)(x)$

d) $(g \circ f)(x)$

e) dominio de la función $f \circ g$

13) Demuestra que una función es la inversa de la otra:

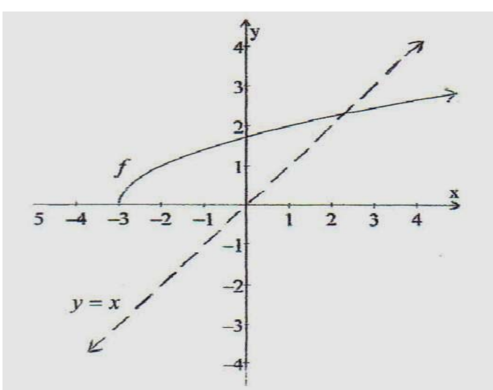
$f(x) = (x+1)^3$; $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$.

14) Las siguientes funciones son uno-a-uno. Halla su función inversa.

a) $f(x) = 4x + 12$

b) $g(x) = x^2 + 6$, $x \geq 0$

15) La gráfica de la función f aparece a continuación. Traza la gráfica de f^{-1} en el mismo sistema cartesiano. Por conveniencia también aparece la gráfica de $y = x$.



OBJETIVOS

Al finalizar este taller los participantes podrán:

1) identificar si una relación es una función, cuando la relación está dada como:
   a) una correspondencia
   b) un conjunto de pares ordenados
   c) una gráfica
   d) una regla

2) dada una función definida por una regla, hallar:
   a) valores funcionales
   b) el cociente diferencial
   c) el dominio

3) dada la gráfica de una función, hallar:
   a) el dominio
   b) el campo de valores
   c) los interceptos en el eje de x
   d) el intercepto en el eje de y
   e) los ceros de la función
   f) valores funcionales
   g) los intervalos donde la función es:
      1) creciente
      2) decreciente
      3) constante
   h) los valores de x en los cuales la función tiene determinados valores

4) dada la gráfica de una función, determinar:
   a) si la función es uno-a-uno
   b) el tipo de simetría que tiene la gráfica

5) determinar algebraicamente si una función definida por una regla es par, impar o ninguna de las dos

6) hallar los interceptos en el eje de x y el intercepto en el eje de y para:
   a) una función polinomial de grado 1 y de grado 2
   b) una función polinomial de grado mayor o igual a 3 que se pueda factorizar

7) dadas las funciones f y g, hallar:
   a) $f+g$
   b) $f-g$
   c) fg
   d) $\dfrac{f}{g}$
   e) $\dfrac{g}{f}$
   f) $f \circ g$
   g) $g \circ f$
   h) el dominio de las funciones obtenidas desde a) – g)

CONTINUACIÓN DE LOS OBJETIVOS

8) dadas las funciones f y g, demostrar que una función es la inversa de la otra

9) dada una función uno-a-uno, hallar su función inversa

10) dada una función, hallar su función inversa, si existe

11) dada la gráfica de una función uno-a-uno, trazar la gráfica de la función inversa en el mismo sistema cartesiano

JUSTIFICACIÓN

El concepto de función es de fundamental relevancia en el estudio de las matemáticas, de otras ciencias y de otras diciplinas. Específicamente, las funciones son de vital importancia en el estudio del Cálculo. Tan es así, que antes de estudiar el primer curso de Cálculo se requiere haber tomado un curso de Precálculo, en el cual el tema más estudiado son las funciones.

Constantemente nos encontramos con situaciones en las cuales una cantidad depende o está dada en función de otra cantidad. O sea, el valor de una de estas cantidades determina el valor de la otra. Por ejemplo, el área de un círculo, al igual que el volumen de una esfera, dependen de su radio. En física el desplazamiento (o la distancia recorrida), la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento son funciones que dependen del tiempo. En el área de administración de empresas el costo, la ganancia, la demanda, la oferta y el ingreso dependen de la cantidad de artículos que se produzcan y se vendan. A través de una función se puede establecer una relación entre cantidades que dependen unas de otras. En términos generales, podemos decir que una función es una regla que describe cómo una cantidad depende o cambia en función de otra.

FUNCIONES Y SUS PROPIEDADES

INTRODUCCIÓN

Podemos imaginarnos que una función actúa como una máquina, la cual recibe unos valores y les aplica un proceso. Este proceso es la regla que define la función, como veremos más adelante. Imaginemos que esta máquina va a tomar los valores de un primer conjunto, le efectúa un proceso y los coloca en un segundo conjunto. Al conjunto de donde la máquina toma inicialmente los valores le llamaremos el dominio de la función. Al conjunto donde la máquina deposita los valores procesados le llamaremos el campo de valores de la función. En matemáticas estos conjuntos suelen ser conjuntos de números, como veremos en la mayoría de los ejemplos de este módulo.

Otra forma de estudiar una función es a base de una correspondencia. Estas ocurren muy frecuentemente en nuestra vida diaria. Algunos ejemplos de correspondencias son: a cada estudiante en un salón de clases le corresponde un pupitre para sentarse, a cada estudiante de la Universidad de Puerto Rico (UPR) le corresponde un número de estudiante y a cada artículo de una tienda le corresponde un precio de venta. Estas correspondencias ocurren entre conjuntos o grupos. Muchas de ellas representan funciones, ya que una función es un tipo de correspondencia . Volviendo a la idea de que una función trabaja como una máquina, podemos pensar entonces que la máquina hace las veces de la correspondencia.

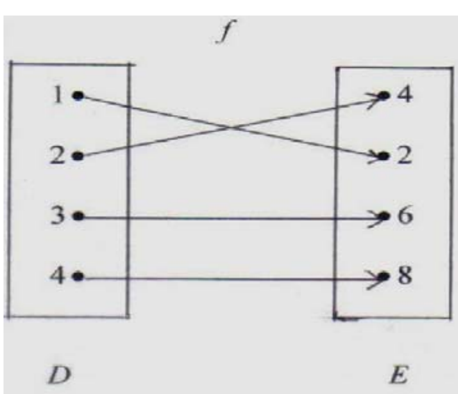
DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIÓN 1 : Una función es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de un conjunto D, llamado dominio, exactamente un elemento y en otro conjunto E .

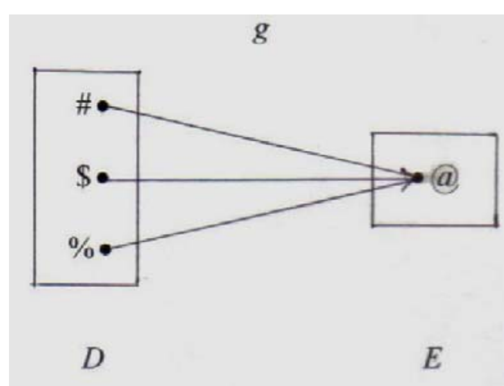
El elemento y de E es el valor de la función para x . A este elemento y se le llama la imagen de x bajo la función. Al conjunto de las imágenes se le llama el campo de valores (CV) de la función. El campo de valores es un subconjunto del conjunto E . Otros nombres para el campo de valores son: alcance, codominio o recorrido. Utilizamos variables para representar las funciones. Estas variables pueden ser mayúsculas o minúsculas. Una de las variables más usadas es la f .

EJEMPLOS DE CORRESPONDENCIAS QUE SON FUNCIONES :

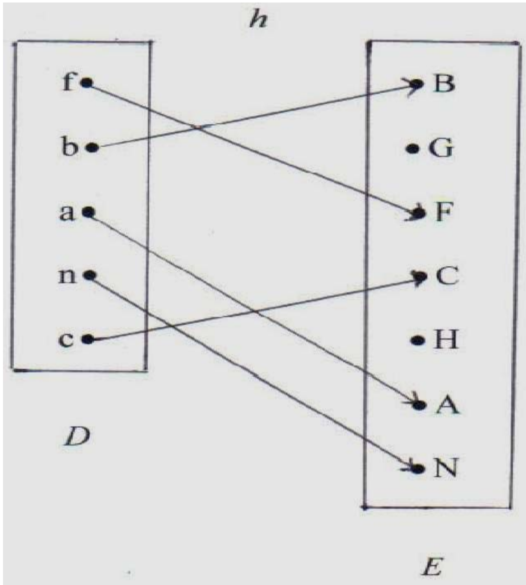
1)



2)



3)



Usaremos la siguiente notación:

D_f = dominio de la función f

CV_f = campo de valores de la función f

En los ejemplos anteriores:

1) $D_f = \{1,2,3,4\}$

$CV_f = \{4,2,6,8\}$

2) $D_g = \{\#, \$, \%\}$

$CV_g = \{@\}$

3) $D_h = \{f,b,a,n,c\}$

$CV_h = \{F,B,A,N,C\}$

DEFINICIÓN 2 (DEFINICIÓN ALTERNA) : Una función es un conjunto de pares ordenados en los cuales no se repite el primer elemento del par en los pares ordenados que son distintos.

Otra forma de representar las correspondencias anteriores es:

1) $f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$

2) $g = \{(\#, @), (\$, @), (\%, @)\}$

3) $h = \{(f,F), (b,B), (a,A), (n,N), (c,C)\}$

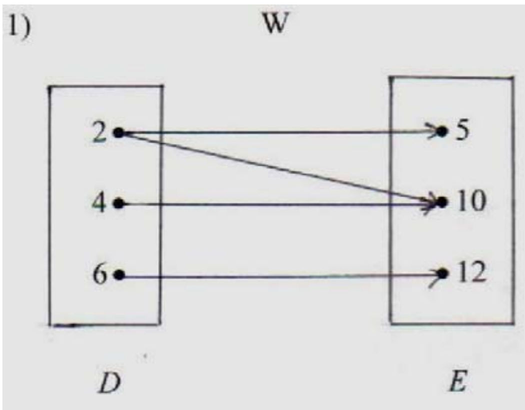
OBSERVACIONES:

1) En una función se puede repetir el segundo elemento de los pares ordenados.
2) El dominio de una función es el conjunto formado por los primeros elementos de los pares ordenados.
3) El campo de valores de una función es el conjunto formado por los segundos elementos de los pares ordenados.

DEFINICIÓN : Una relación es un conjunto cualquiera de pares ordenados.
$\therefore$ Toda función es una relación.
$\therefore$ No toda relación es una función.

NOTAS: 1) El símbolo $\therefore$ significa " por lo tanto".
2) También se usan variables mayúsculas o minúsculas para representar una relación.

EJEMPLOS DE RELACIONES QUE NO SON FUNCIONES :



W = {(2,5), (2,10), (4,10), (6,12)}

W es una relación que no es una función porque se repite el primer elemento del par en dos pares ordenados distintos. Otra explicación es que se contradice la primera definición, la cual dice que a cada elemento del primer conjunto (D), se le asignará sólo un elemento del segundo conjunto (E) . Al número 2 se le están asignando dos valores que son el 5 y el 10.

2) $g = \{ (x, y) : y^2 = x \}$
Los siguientes pares ordenados, entre otros, pertenecen a esta relación: (1,1), $(1,-1)$, (4,2), $(4,-2)$. Vemos entonces que esta relación no es una función porque se repite el primer elemento de un par ordenado en al menos dos pares ordenados distintos.

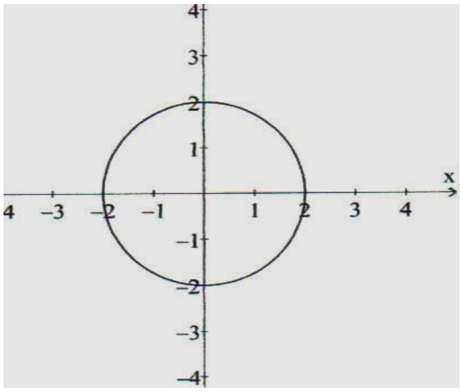
GRÁFICAS

DEFINICIÓN: La gráfica de una relación es el conjunto de todos los pares ordenados que pertenecen a la relación.
Dada la gráfica de una relación, podemos determinar si ésta representa una función,usando la prueba de la recta vertical. Veamos en qué consiste esta prueba.

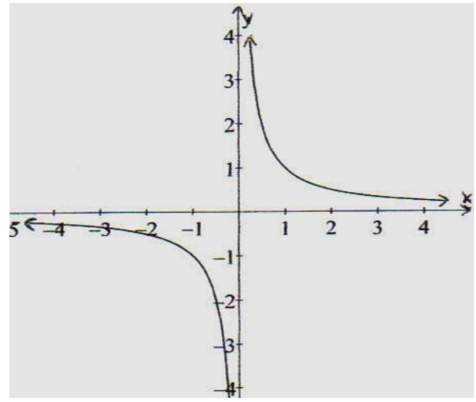
PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL
Esta prueba es una forma geométrica que consiste en trazar rectas verticales que intersequen la gráfica. La gráfica representa una función si todas las rectas verticales que intersequen la gráfica, la intersecan en un solo punto. Si al menos una recta vertical interseca la gráfica en más de un punto, entonces estos puntos de intersección repiten el primer elemento del par ordenado en pares ordenados distintos. Por lo tanto, las gráficas donde esto ocurre no representan funciones.

EJEMPLO: Indica cuáles de las siguientes gráficas representan funciones:

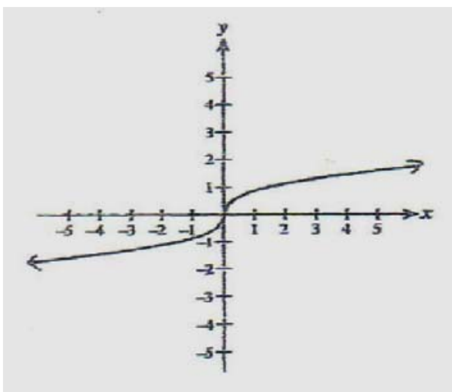
1)



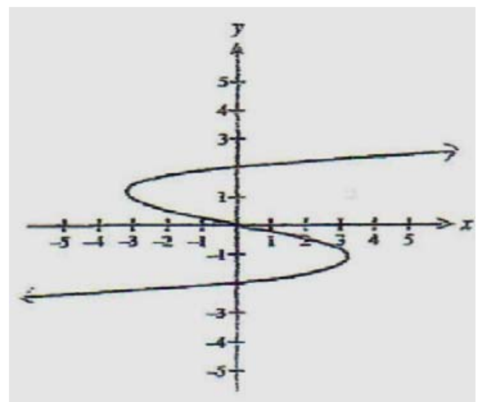
2)



3)



4)



RESPUESTA:
Las gráficas que representan funciones son la 2 y la 3 porque en estas gráficas todas las rectas verticales que intersecan las gráficas, las intersecan en un solo punto.

NOTACIÓN FUNCIONAL

Sea f una función del conjunto D (su dominio) al conjunto E. Representamos esto así:
$D \xrightarrow{f} E$ ó $f : D \longrightarrow E$.
Sea x un elemento en D y sea y la imagen de x bajo f. La notación que representa esta correspondencia es: $f(x) = y$.
Se lee: " f de x es igual a y " .
Esta notación nos dice que la función f le asigna el elemento y al elemento x. Nos indica además que la variable y está dada en función de la variable x. Vemos que la variable y depende de la variable x. Por lo tanto, a la x le llamamos la variable independiente y a la y le llamamos la variable dependiente.

Esto es: $x \xrightarrow{f} y$ ó $f : x \longrightarrow y$ ó $(x, y) \in f$

EJEMPLO:

Sea $f(x)=x^2$. (Esto es: $f : x \longrightarrow x^2$ ó $x \xrightarrow{f} x^2$)

a) $f(2)=2^2=4$ $\quad 2 \xrightarrow{f} 4$ $\quad (2,4)\in f$

b) $f(-3)=(-3)^2=9$ $\quad -3 \xrightarrow{f} 9$ $\quad (-3,9)\in f$

c) $f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ $\quad \frac{1}{4} \xrightarrow{f} \frac{1}{16}$ $\quad \left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)\in f$

d) $f\left(\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ $\quad \sqrt{3} \xrightarrow{f} 3$ $\quad \left(\sqrt{3}\ ,\ 3\right)\in f$

e) $f(2.1)=(2.1)^2=4.41$ $\quad 2.1 \xrightarrow{f} 4.41$ $\quad (2.1,4.41)\in f$

f) $f(a)=a^2$ $\quad a \xrightarrow{f} a^2$ $\quad (a,a^2)\in f$

g) $f(3n^2)=(3n^2)^2=9n^4$ $\quad 3n^2 \xrightarrow{f} 9n^4$ $\quad \left(3n^2,9n^4\right)\in f$

EVALUACIÓN DE FUNCIONES:
Evaluar una función consiste en sustituir la variable en la cual está escrita la función (o sea, la variable independiente), por el valor o la expresión que aparece dentro de los paréntesis.

EJEMPLOS:

1) Sea $g(x)=3x+1$. Halla:

a) $g(5)=3(5)+1=15+1=16$

b) $g\left(\frac{-1}{3}\right)=3\left(\frac{-1}{3}\right)+1=-1+1=0$

c) $g(4.6)=3(4.6)+1=13.8+1=14.8$

d) $g\left(\sqrt[5]{7}\right)=3\left(\sqrt[5]{7}\right)+1=3\sqrt[5]{7}+1$

e) $g(\pi)=3(\pi)+1=3\pi+1$

f) $g(4a)=3(4a)+1=12a+1$

g) $g(x+h)=3(x+h)+1=3x+3h+1$

OBSERVACIÓN: Para hallar $g(x+h)$ se sustituye x por $x+h$ y se simplifica.

2) Sea $f(t)=\dfrac{2t}{t^2+1}$. Si a es un número positivo, halla:

a) $$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{2\left(\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}=\frac{\frac{2}{a}}{\frac{1}{a^2}+1}=\frac{\frac{2}{a}}{\frac{1+a^2}{a^2}}=\frac{2}{a}\cdot\frac{a^2}{1+a^2}=\frac{2a^2}{a\left(1+a^2\right)}=\frac{2a}{1+a^2}$$

b) $$\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{\frac{2a}{a^2+1}}=1\cdot\frac{a^2+1}{2a}=\frac{a^2+1}{2a}$$

c) $$f\left(\sqrt{a}\right)=\frac{2\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}\right)^2+1}=\frac{2\sqrt{a}}{a+1}$$

d) $$\sqrt{f(2a)}=\sqrt{\frac{2(2a)}{(2a)^2+1}}=\sqrt{\frac{4a}{4a^2+1}}=2\sqrt{\frac{a}{4a^2+1}}$$

COCIENTE DIFERENCIAL

Le llamamos el cociente diferencial a la siguiente expresión: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h},\ para\ h\neq 0$.
A este nivel veremos al cociente diferencial como una expresión, pero éste se vuelve a estudiar desde otro punto de vista en el curso de Cálculo.

EJEMPLOS:

1) Halla el cociente diferencial para las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x-1$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[2(x+h)-1]-[2x-1]}{h} \qquad (h\neq 0)$$

$$=\frac{(2x+2h-1)-(2x-1)}{h}$$

$$=\frac{2x+2h-1-2x+1}{h}=\frac{2h}{h}=2$$

b) $g(x) = x^2 + 3x - 2$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\left[(x+h)^2 + 3(x+h) - 2\right] - \left[x^2 + 3x - 2\right]}{h} \qquad (h \neq 0)$$

$$= \frac{(x^2 + xh + hx + h^2 + 3x + 3h - 2) - (x^2 + 3x - 2)}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - 2 - x^2 - 3x + 2}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2 + 3h}{h} = \frac{h\ (2x + h + 3)}{h} = 2x + h + 3$$

c) $q(a) = \dfrac{a}{a+3}$

$$\frac{q(x+h)-q(x)}{h} = \frac{\dfrac{x+h}{(x+h)+3} - \dfrac{x}{x+3}}{h} = \frac{\dfrac{(x+h)(x+3) - x(x+h+3)}{(x+h+3)(x+3)}}{h} \qquad (h \neq 0)$$

$$= \frac{x^2 + 3x + hx + 3h - x^2 - xh - 3x}{(x+h+3)(x+3)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{3h}{h(x+h+3)(x+3)}$$

$$= \frac{3}{(x+h+3)(x+3)}$$

2) Si $g(x) = 3x - x^2$, halla: $\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}$, para $h \neq 0$.

$$\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{[3(2+h)\ \ -(2+h)^2] - [3(2) - 2^2]}{h} = \frac{6 + 3h - (4 + 4h + h^2) - 2}{h}$$

$$= \frac{3h - 4 - 4h - h^2 + 4}{h} = \frac{-h - h^2}{h} = \frac{h(-1-h)}{h} = -1 - h$$

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

De ahora en adelante, trabajaremos con funciones cuyo dominio y campo de valores son los números reales ($\Re$) o un subconjunto de éstos. Definimos el dominio de la función f como el conjunto de números reales donde x toma sus valores, tal que $f(x)$ sea un número real. Esto es, son aquellos números reales donde x toma sus valores tal que al evaluar la función f en esos valores también se obtiene un número real.

TIPOS DE FUNCIONES Y SUS DOMINIOS :

I. Funciones Polinomiales ó Polinómicas – Son funciones definidas por un polinomio. Su dominio es $\Re$. Otra forma de escribir $\Re$ es $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLOS:

1) $f(x) = 3x + 5$ (ejemplo de una función de grado 1 ó función lineal)
2) $g(x) = x^2 - 4x + 3$ (ejemplo de una función de grado 2 ó función cuadrática)
3) $h(t) = 2t^3 - 4$ (ejemplo de una función de grado 3 ó función cúbica)

II. Funciones con raíces de índice impar – El dominio de estas funciones es $\Re$.

EJEMPLOS:

1) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + 5$
2) $p(x) = x\sqrt[5]{6x - 7}$

III. Funciones con raíces de índice par – El dominio de estas funciones es un subconjunto de $\Re$. Para hallar el dominio formamos una desigualdad tomando el radicando mayor o igual a cero y la resolvemos. De esta manera logramos que los valores de la función siempre sean números reales. Recuerda, que el valor de un radical cuyo índice es par y el radicando es negativo, no es un número real.

EJEMPLOS:

1) $f(x) = \sqrt{x - 5}$

$$x - 5 \geq 0$$
$$x \geq 5$$

$\therefore\ D = \{x : x \geq 5\}$ ó $D = [5, \infty)$

OBSERVACIÓN: El dominio se puede expresar como un conjunto o como un intervalo.

2) $k(n) = \sqrt[4]{2n + 1}$

$$2n + 1 \geq 0$$
$$2n \geq -1$$
$$n \geq \frac{-1}{2}$$
$$\therefore D = \left[\frac{-1}{2}, \infty\right)$$

3) $t(x) = \sqrt{2-3x} + 4$

$2-3x \geq 0$

$-3x \geq -2$

$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-2}{-3}$ (Se invirtió el símbolo de la desigualdad porque se dividió por un número negativo.)

$x \leq \frac{2}{3}$

$\therefore D = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$

4) $f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$

$x+4 \geq 0$ y $4-x \geq 0$

$-x \geq -4$

$x \geq -4$ $x \leq 4$

$\therefore\ D = [-4, 4]$

OBSERVACIÓN: En este ejemplo el dominio tiene dos condiciones y ambas se tienen que cumplir.

IV. Funciones con variables en el denominador – El dominio de estas funciones es el subconjunto de $\Re$ tal que el denominador no sea cero y los valores de la función sean números reales. Una fracción no está definida cuando el denominador es cero.

EJEMPLOS:

1) $F(x) = \frac{2x}{x-1}$

$x-1 \neq 0$ (En el dominio no se incluyen los valores que hacen cero el denominador porque en estos valores la función no está definida.)

$x \neq 1$

$\therefore\ D = \{x : x \neq 1\}$ ó $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

2) $g(a) = \frac{a^2-1}{a^2+a-6}$

$a^2+a-6 \neq 0$

$(a-2)(a+3) \neq 0$

$a-2 \neq 0$ $a+3 \neq 0$

$a \neq 2$ y $a \neq -3$

$\therefore\ D = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$

3) $H(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{2x+5}}$

$2x + 5 > 0$ (Tomamos $2x+5$ estrictamente mayor que cero, porque esta expresión está en el denominador y en el dominio no se incluyen los valores que hacen cero el denominador.)

$x > \dfrac{-5}{2}$

$\therefore D = \left(\dfrac{-5}{2}, \infty\right)$

4) $g(m) = \dfrac{\sqrt{m}}{m-3}$

$m \geq 0$ y $m - 3 \neq 0$

$m \neq 3$

$\therefore\ D = [0,3) \cup (3, \infty)$

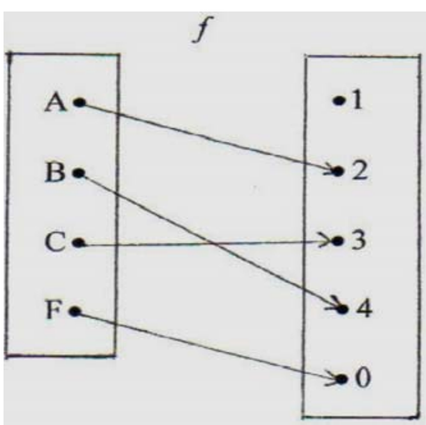
EJERCICIOS DE PRÁCTICA I:

1) ¿Cuáles de las siguientes relaciones representan funciones?

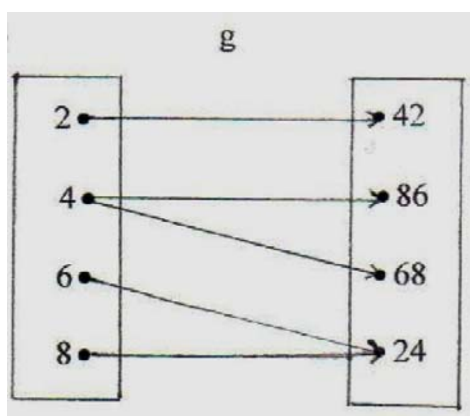
a) $f = \{(3,4),(5,6)(7,9),(3,0)\}$
b) $g = \{(1,-1),(2,-2),(3,-3),(4,-4),(5,-5)\}$
c) $h = \{(x, y) : y = x^3 - 2x^2\}$
d) $k = \{(x, y) : |x| = |y|\}$
e) $p = \{(x, y) : y^2 - x^2 = 1\}$

2) ¿Cuáles de las siguientes correspondencias representan funciones?
Para aquellas que representen funciones, halla su dominio y su campo de valores.

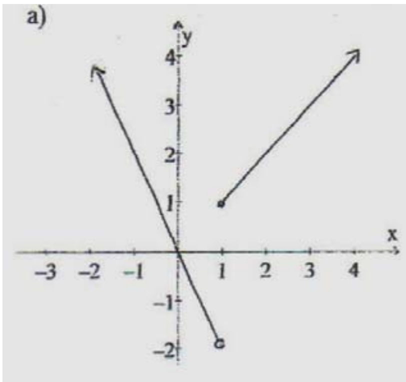
a)

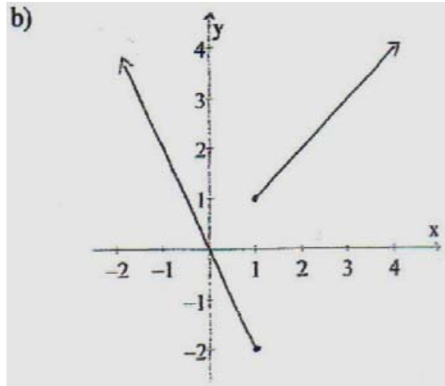


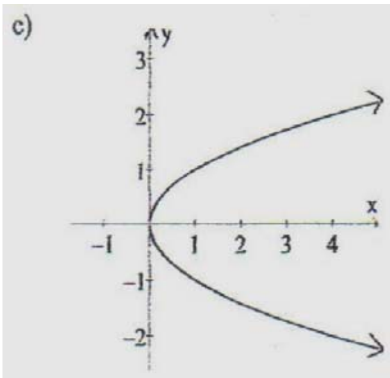
b)

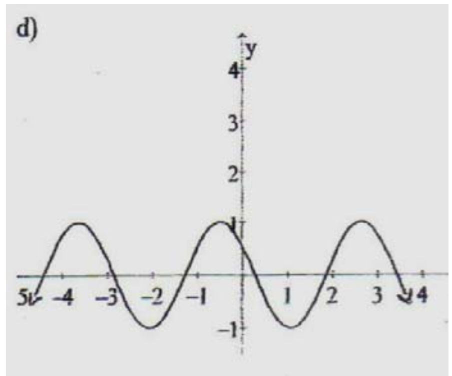


3) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones?









4) Sea $f(x) = 4x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$. Halla:

a) $f(-2)$

b) $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$

c) $f(5n)$

d) $f(x+h)$

e) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$

f) D_f

g) $g(4)$

h) $g\left(\dfrac{-1}{2}\right)$

i) $g(3a)$

j) $g(x+h)$

k) $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$

l) D_g

5) Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{5x+7}$

b) $g(x) = 3\sqrt{6-3x} - 5\sqrt{2x} + x$

c) $K(t) = \dfrac{6t-1}{\sqrt{4-t}}$

d) $T(a) = a\sqrt[5]{2a+4}$

e) $F(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{2x}$

f) $H(n) = \dfrac{n^5}{n^2 - 9}$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

La gráfica es el retrato de una función. Por lo tanto, observando la gráfica podemos determinar las propiedades de una función. Podemos hallar los ceros reales de la función y los interceptos en el eje de x y en el eje de y. También se puede hallar su dominio y su campo de valores, así como valores funcionales e intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante. Además, se pueden estudiar las distintas simetrías que tiene la gráfica y clasificar la función de acuerdo a éstas.

I. INTERCEPTOS EN EL EJE DE X

DEFINICIÓN: Los interceptos en el eje de x de la función f son los puntos donde la gráfica de f interseca o cruza el eje de x.
La coordenada en y de estos puntos es cero, ya que son puntos sobre el eje de x.

II. CEROS REALES DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIÓN: Los ceros reales de la función f son los valores de x en el dominio de f para los cuales $f(x) = 0$.
Esto es, son los valores de x de los interceptos en el eje de x.

OBSERVACIÓN:
Hay funciones que no tienen ceros en el conjunto de los números reales. O sea, la gráfica de estas funciones no tiene interceptos en el eje de x.

III. INTERCEPTO EN EL EJE DE Y

DEFINICIÓN: El intercepto en el eje de y de la función f es el punto donde la gráfica de f interseca o cruza el eje de y.
Esto es, es el valor de la función en $x = 0$. O sea, es $f(0)$.

EJEMPLO: Halla los interceptos en los ejes y los ceros para:

1) $f(x) = 2x - 5$

a) $f(x) = 0$

$2x - 5 = 0$

$x = \frac{5}{2}$

$\therefore \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ es el intercepto en el eje de x

$\therefore \frac{5}{2}$ es cero de f

b) $f(0) = 2(0) - 5$

$= 0 - 5$

$= -5$

$\therefore (0,-5)$ es el intercepto en el eje de y

2) $g(x) = x^2 - 5x + 4$

a) $g(x) = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-4)(x-1) = 0$

$x - 4 = 0$ ó $x - 1 = 0$

$x = 4$ ó $x = 1$

$\therefore$ (4,0) y (1,0) son los interceptos en el eje de x

$\therefore$ 4 y 1 son los ceros de g

b) $g(0) = (0)^2 - 5(0) + 4$

$= 0+4$

$= 4$

$\therefore$ (0,4) es el intercepto en el eje de y

3) $F(x) = 2x^2 + 8$

a) $F(x) = 0$

$2x^2 + 8 = 0$

$2x^2 = -8$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4} \notin \Re$

$\therefore$ F no tiene interceptos en el eje de x y no tiene ceros reales.

b) $F(0) = 2(0)^2 + 8$

$= 0 + 8$

$= 8$

$\therefore$ (0,8) es el intercepto en el eje de y

4) $H(x) = x^2 + 2x - 1$

a) $H(x) = 0$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

Usando la fórmula cuadrática tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$\therefore$ $(-1 \pm \sqrt{2}, 0)$ son los interceptos en el eje de x

O sea, hay dos interceptos en el eje de x que son: $(-1+\sqrt{2}, 0)$ **y** $(-1-\sqrt{2}, 0)$.

$\therefore$ $-1 \pm \sqrt{2}$ son los ceros de H (O sea, H tiene dos ceros que son: $-1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$.)

b) $H(0) = 0^2 + 2(0) - 1$

$= -1$

$\therefore$ $(0, -1)$ es el intercepto en el eje de y

5) $q(x) = x^4 - 12x^2$

a) $q(x) = 0$

$x^4 - 12x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 12) = 0$

$x^2 = 0$ ó $x^2 - 12 = 0$

$x = \pm\sqrt{0}$ $\quad$ $x^2 = 12$

$x = 0$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{12}$

$x = \pm 2\sqrt{3}$

$\therefore$ (0,0) ; $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ son los interceptos en el eje de x

$\therefore$ q tiene tres ceros que son: 0, $2\sqrt{3}$ **,** $-2\sqrt{3}$

b) $q(0) = 0^4 - 12(0)^2$

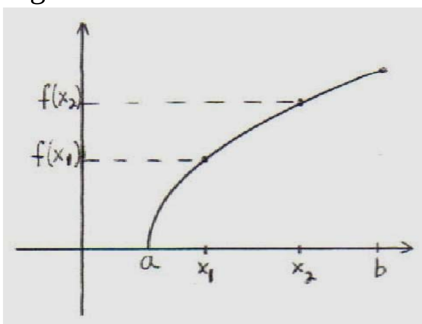
$= 0$

$\therefore$ (0,0) es el intercepto en el eje de y

IV. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

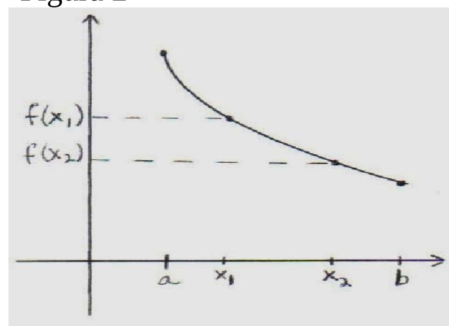
Considera las siguientes figuras que contienen la gráfica de la función f.

Figura 1



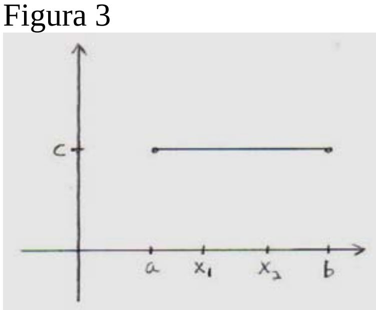
La función f es creciente en (a,b). A medida que x crece, f (x) también crece. Observa que para todo x_1 y x_2 en (a,b) con $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Figura 2



La función f es decreciente en (a,b). A medida que x crece, f (x) decrece. Observa que para todo x_1 y x_2 en (a,b) con $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Figura 3



La función f es constante en (a,b). Para todo x_1 y x_2 en (a,b) entonces f (x_1) = f (x_2) = c.

A continuación aparece la definición formal para funciones crecientes y decrecientes.

DEFINICIÓN: Sea (a,b) un intervalo en el dominio de la función f. Suponer que x_1 y x_2 son dos números reales cualesquieras en (a,b). Entonces:

i) la función f es creciente en (a,b) si $f(x_1) < f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$.

ii) la función f es decreciente en (a,b) si $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$.

iii) la función f es constante en (a,b) si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1 y x_2.

Los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante son intervalos en el eje de x. Para efectos de este módulo, escribiremos estos intervalos como intervalos abiertos, como se establece en la definición anterior. Hay textos que escriben estos intervalos como intervalos cerrados. Todo depende de cómo se establezcan en la definición.

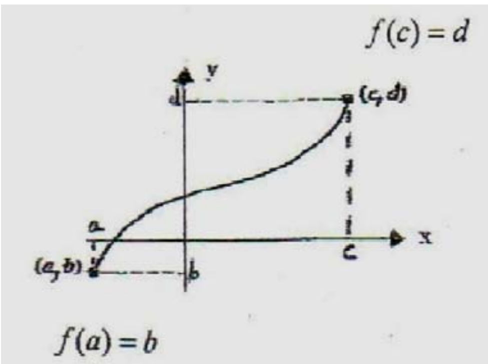
GUIAS VISUALES PARA ESTUDIAR LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN :

1) El dominio se refiere al conjunto de números reales en el eje de x, donde está dibujada la gráfica.
2) El campo de valores se refiere al conjunto de números reales en el eje de y, donde está dibujada la gráfica.
3) Para hallar $f(a)$ localizamos el punto en la gráfica que corresponde a $x = a$. La respuesta es el valor de y, para este punto.
4) La función es creciente para los valores en el eje de x, donde al observar la gráfica de izquierda a derecha, la vemos subir.
5) La función es decreciente para los valores en el eje de x, donde al observar la gráfica de izquierda a derecha, la vemos bajar.
6) La función es constante para los valores en el eje de x, donde la gráfica ni sube ni baja.
7) Los valores de x donde $f(x) > 0$ son los valores en el eje de x para los cuales la gráfica está por encima de este eje, ya que son los valores donde $y > 0$.
8) Los valores de x donde $f(x) \geq 0$ son los valores en el eje de x para los cuales la gráfica interseca este eje y además está por encima de él, ya que son los valores donde $y \geq 0$.
9) Los valores de x donde $f(x) < 0$ son los valores en el eje de x para los cuales la gráfica está por debajo de este eje, ya que son los valores donde $y < 0$.
10) Los valores de x donde $f(x) \leq 0$ son los valores en el eje de x para los cuales la gráfica interseca este eje y además está por debajo de él, ya que son los valores donde $y \leq 0$.

ILUSTRACIONES DE LAS GUIAS :

1,2,3: $y = f(x)$

Figura1

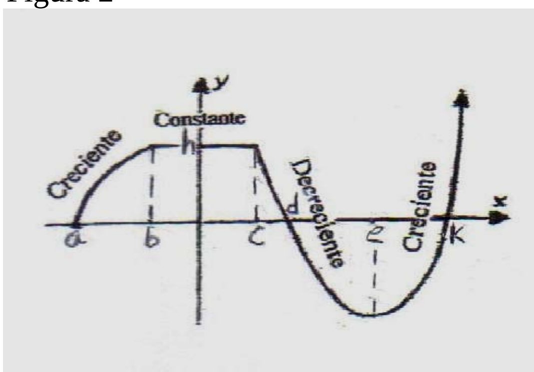


$D_f = [a, c]$

$CV_f = [b, d]$

4-10: $y = g(x)$

Figura 2



Interceptos en el eje de x : $(a, 0)$, $(d, 0)$, $(k, 0)$

Intercepto en el eje de y : $(0, h)$)

g es creciente en (a, b); (e, ∞)

g es decreciente en (c, e)

g es constante en (b, c)

$g(x) < 0$ en (d, k)

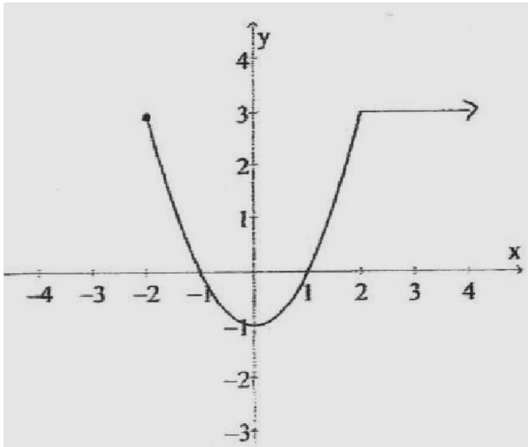
$g(x) \leq 0$ en $[d, k]$

$g(x) > 0$ en $(a, d) \cup (k, \infty)$

$g(x) \geq 0$ en $[a, d] \cup [k, \infty)$

EJEMPLOS :

1) La gráfica de la función f aparece a continuación.



Halla:

a) Dominio

b) Campo de Valores

c) Intervalos donde f es:

1) Creciente

2) Decreciente

3) Constante

d) $f(-2)$

e) $f(1)$

f) $f(0)$

g) $f(10)$

RESPUESTAS:

a) $[-2,\infty)$

b) $[-1,3]$

c) 1) $(0,2)$ 2) $(-2,0)$ 3) $(2,\infty)$

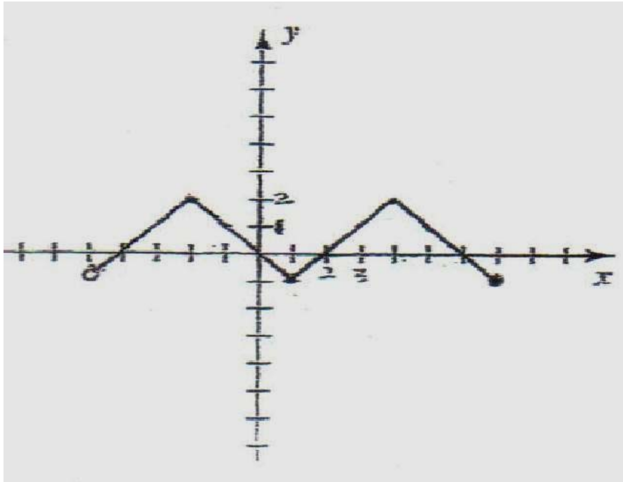
d) 3

e) 0

f) -1

g) 3

2) La gráfica de la función g aparece a continuación.



Halla:

a) Dominio
b) Campo de Valores
c) Interceptos en el eje de x
d) Intercepto en el eje de y
e) $g(7)$
f) $g(-1)$
g) Valores de x donde $g(x)=2$
h) Valores de x donde $g(x)=-1$
i) Valores de x donde $g(x)>0$
j) Valores de x donde $g(x)\geq 0$
k) Valores de x donde $g(x)<0$
l) Valores de x donde $g(x)\leq 0$
m) Intervalos donde g es:
 1) Creciente
 2) Decreciente
 3) Constante

RESPUESTAS:

a) $(-5,7]$ b) $[-1,2]$ c) $(-4,0)$; $(0,0)$; $(2,0)$; $(6,0)$ d) $(0,0)$

e) -1 f) 1 g) $x=-2$, $x=4$ h) $x=1$, $x=7$

i) $(-4,0)\cup(2,6)$ j) $[-4,0]\cup[2,6]$ k) $(-5,-4)\cup(0,2)\cup(6,7)$

l) $(-5,-4]\cup[0,2]\cup[6,7]$

m) 1) $(-5,-2)$; $(1,4)$ 2) $(-2,1)$; $(4,7)$ 3) ninguno

V. SIMETRIAS

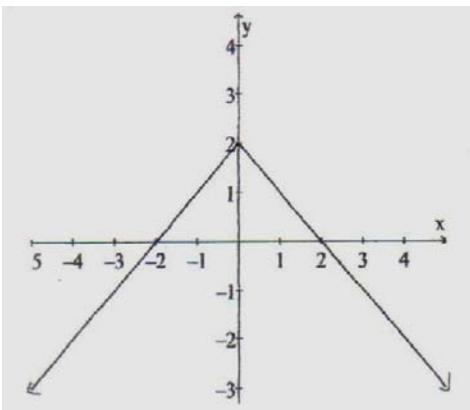
A. SIMETRIA CON RESPECTO AL EJE DE Y

DEFINICIÓN: Una gráfica es simétrica con respecto al eje de y si para todo punto (x, y) que está en la gráfica, el punto $(-x, y)$ también lo está.
Una función cuya gráfica es simétrica con respecto al eje de y, se llama una función par.
La siguiente es la definición algebraica de una función par.

DEFINICIÓN: Una función f es par si $f(-x) = f(x)$, para todo x en el dominio de f.

EJEMPLOS:

1) Determina si la siguiente gráfica es simétrica con respecto al eje de y.



RESPUESTA: Esta gráfica es simétrica con respecto al eje de y. Observa que para cada punto (x, y) que está en esta gráfica, también está el punto $(-x, y)$. Por ejemplo: (2,0) y $(-2,0)$, (1,1) y $(-1,1)$, entre otros, están en la gráfica.Como esta gráfica es simétrica con respecto al eje de y, entoces la función representada por esta gráfica es una función par.

2) Determina cuáles de las siguientes funciones son pares:

a) $f(x) = 5x^4 + x^6$
b) $g(x) = 3x - 1$
c) $h(x) = |x| - 2x^2$

SOLUCIÓN:
Se sustituye x por $-x$ en la función dada y se simplifica. Si la expresión obtenida es igual a la función dada, entonces la función es par. Si la expresión obtenida no es igual a la función dada, entonces la función no es par.

a) $f(-x) = 5(-x)^4 + (-x)^6$
$= 5x^4 + x^6$
$= f(x)$
$\therefore$ f es función par

b) $g(-x) = 3(-x) - 1$
$= -3x - 1$
$\neq g(x)$
$\therefore$ g no es función par

c) $h(-x) = |-x| - 2(-x)^2$

$= |x| - 2x^2$ Recuerda: El valor absoluto de un número real es igual al valor absoluto de su opuesto.

$= h(x)$

$\therefore$ h es función par

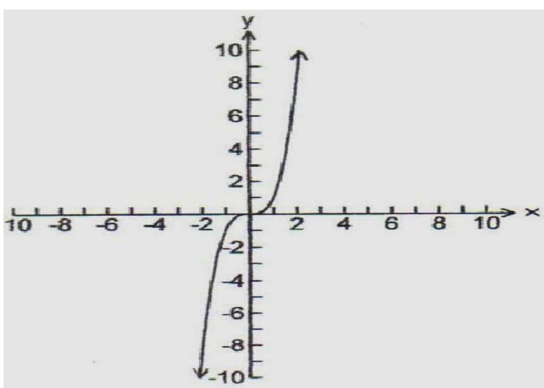
B. SIMETRIA CON RESPECTO AL ORIGEN

DEFINICIÓN: Una gráfica es simétrica con respecto al origen si para todo punto (x, y) que está en la gráfica, el punto $(-x,-y)$ también lo está.
Una función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen, se llama una función impar.
La siguiente es la definición algebraica de una función impar.

DEFINICIÓN: Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$, para todo x en el dominio de f .

EJEMPLO:

Determina si la siguiente gráfica es simétrica con respecto al origen.



RESPUESTA: Esta gráfica es simétrica con respecto al origen. Observa que para cada punto (x, y) que está en esta gráfica, también está el punto $(-x,-y)$. Por ejemplo: $(1,1)$ y $(-1,-1)$, $(2,8)$ y $(-2,-8)$, entre otros, están en la gráfica. Como esta gráfica es simétrica con respecto al origen, entonces la función representada por esta gráfica es una función impar.

COMENTARIO: La función $f(x) = 0$ es par y también es impar ya que:

a) $f(-x) = 0$
$= f(x)$

b) $f(-x) = 0$
$= -0 = -f(x)$

EJEMPLOS:

1) Determina cuáles de las siguientes funciones son impares, pares o ninguna de las dos:

a) $f(x) = x^3 - 4x$

b) $g(x) = 4x + 3$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $k(t) = t^4 - 5t^2$

e) $F(x) = x^2 - x$

SOLUCIÓN:
Se sustituye x por $-x$ en la función dada y se simplifica.Si la función obtenida es igual a la función dada, entonces la función es par. Si la función obtenida es igual al opuesto de la función dada, entonces la función es impar. Si la función obtenida no es igual a la función dada ni al opuesto de ella , entonces la función no es par ni impar.

a) $f(x)=x^3-4x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3-4(-x) \\ &= -x^3+4x \\ &= -(x^3-4x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$\therefore$ f es función impar

b) $g(x)=4x+3$

$$\begin{aligned} g(-x) &= 4(-x)+3 \\ &= -4x+3 \\ &\neq g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-x) &= -4x+3 \\ &\neq -g(x) \qquad (-g(x)=-4x-3) \end{aligned}$$

$\therefore$ g no es función par ni impar

c) $h(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{1}{-x} \\ &= -\frac{1}{x} \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

$\therefore$ h es función impar

d) $k(t)=t^4-5t^2$

$$\begin{aligned} k(-t) &= (-t)^4-5(-t)^2 \\ &= t^4-5t^2 \\ &= k(t) \end{aligned}$$

$\therefore$ k es función par

e) $F(x)=x^2-x$

$$\begin{aligned} F(-x) &= (-x)^2-(-x) \\ &= x^2+x \\ &\neq F(x) \end{aligned}$$

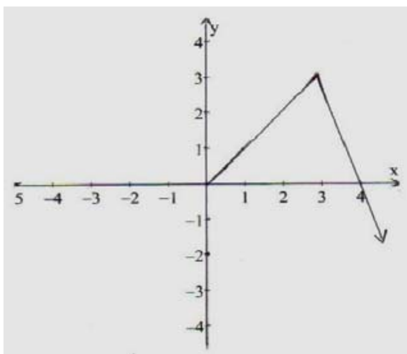
$$\begin{aligned} F(-x) &= x^2+x \\ &\neq -F(x) \qquad (-F(x)=-x^2+x) \end{aligned}$$

$\therefore$ F no es función par ni impar

OBSERVACIÓN: Si f es una función definida por una regla, entonces al sustituir x por $-x$ en f, podemos obtener lo siguiente para todo x en su dominio:

1) $f(-x) = f(x)$
   $\therefore$ f es función par
2) $f(-x) = -f(x)$
   $\therefore$ f es función impar
3) $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$
   $\therefore$ f no es función par ni impar

2) La gráfica de la función g aparece a continuación:

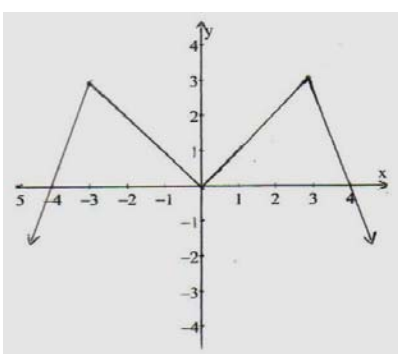


Completa la gráfica de g para que sea simétrica con respecto al:

a) eje de y. b) origen.

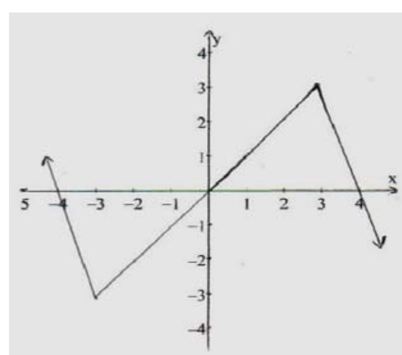
SOLUCIÓN:

a)



Se observa que esta gráfica, además de tener cada (x, y) de la gráfica dada, contiene también a $(-x, y)$.
Por ejemplo: (1,1), (2,2) y (3,3) están en ambas gráficas y además esta gráfica contiene a $(-1,1), (-2,2)$ y a $(-3,3)$.

b)



Se observa que esta gráfica, además de tener cada (x, y) de la gráfica dada, contiene también a $(-x, -y)$.
Por ejemplo: (1,1), (2,2) y (3,3) están en ambas gráficas y además esta gráfica contiene a $(-1,-1), (-2,-2)$ y a $(-3,-3)$.

VI. FUNCIONES UNO – A – UNO

Una función f es uno-a-uno (1-1), cuando a valores distintos en el dominio de la función le corresponden valores distintos en el campo de valores de la función.

DEFINICIÓN: Una función f, cuyo dominio es D y su campo de valores es R, es una función uno-a-uno si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes. Para todo a y b en D:

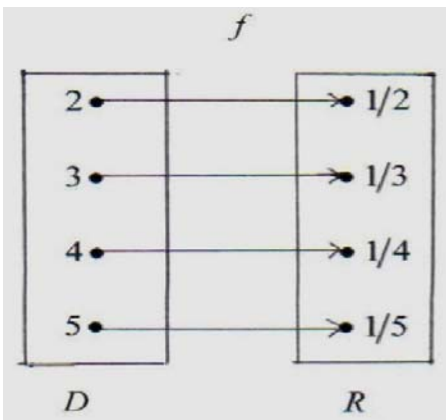
i) si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$.

ii) si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$.

Cuando la función es 1-1, no se repite el segundo elemento de los pares ordenados, en pares ordenados distintos.

EJEMPLOS:

1) Determina si la función f que aparece a continuación es 1-1.



RESPUESTA:

$$f = \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \left(4, \frac{1}{4}\right), \left(5, \frac{1}{5}\right)\right\}$$

Esta función es 1-1, porque no se repite el segundo elemento de los pares ordenados, en pares ordenados distintos.

2) ¿ Cuáles de las siguientes funciones son 1-1 ?

a) $f(x) = |x + 3|$

b) $g(x) = 2x - 3$

c) $h(x) = 4$

SOLUCIÓN:

a) Los siguientes pares ordenados, entre otros, pertenecen a la función f : $(-2, 1)$ y $(-4, 1)$.

$\therefore$ f no es una función 1-1 porque se repite el segundo elemento del par ordenado en estos dos pares ordenados que son distintos

b) La función g es la única que es 1-1, porque no se repite el segundo elemento de los pares ordenados, en pares ordenados distintos. Para demostrar que esta función es 1-1, usaremos la definición que aparece en la página anterior.
Suponer que $g(a) = g(b)$, donde a y b están en el dominio de g. Tenemos entonces que,

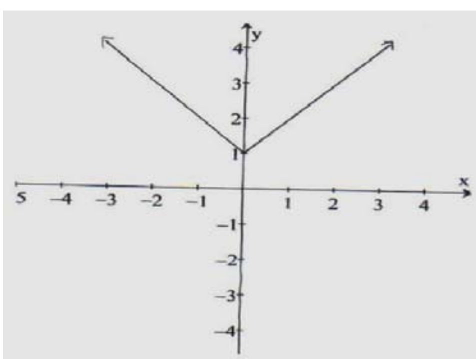
$$g(a) = g(b)$$
$$2a - 3 = 2b - 3$$
$$2a = 2b$$
$$a = b \quad , \quad \therefore \quad g \text{ es una función 1-1}$$

c) Los siguientes pares ordenados, entre otros, pertenecen a la función h: (1,4) y (2,4).
$\therefore$ h no es una función 1-1 porque se repite el segundo elemento del par ordenado en estos dos pares ordenados que son distintos

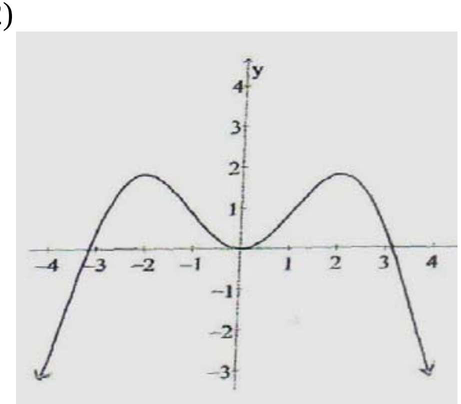
PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL
Esta prueba se utiliza para determinar si la función representada por una gráfica, es una función 1-1. Esta es una prueba geométrica que consiste en trazar rectas horizontales que intersequen la gráfica de la función. La función es 1-1 cuando todas estas rectas horizontales intersecan la gráfica de la función una sola vez, ya que si al menos una de estas rectas interseca la gráfica más de una vez , entonces quiere decir que la gráfica contiene puntos distintos para los cuales el segundo elemento de los pares ordenados es igual. Si esto ocurre la función no es 1-1.

EJEMPLO:
Determina cuáles de las siguientes gráficas representan funciones 1-1:

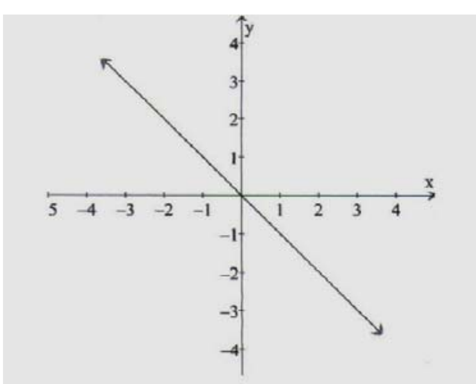
1)



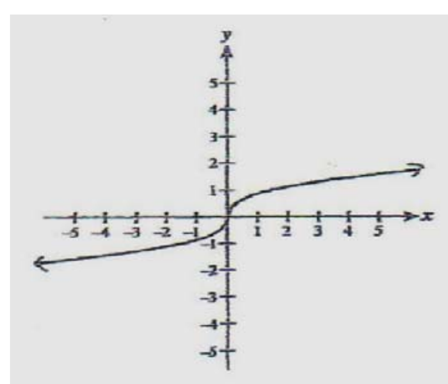
2)



3)



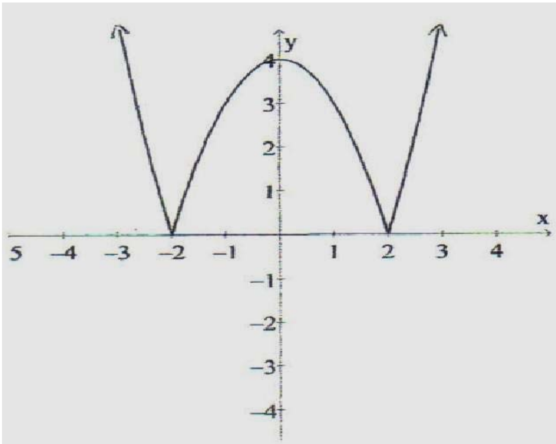
4)



RESPUESTA: La gráfica 3 y la gráfica 4 representan funciones 1-1.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA II:

1) La gráfica de la función f aparece a continuación.



a) Halla:

1) Dominio
2) Campo de Valores
3) $f(0)$
4) $f(1)$
5) $f(-2)$
6) Interceptos en el eje de x
7) Ceros de f
8) Intercepto en el eje de y
9) Intervalos donde f es:
   a) creciente
   b) decreciente
   c) constante
10) Valores de x donde:
   a) $f(x) > 0$
   b) $f(x) \geq 0$
   c) $f(x) < 0$
   d) $f(x) \leq 0$
   e) $f(x) = 3$

b) Determina:

1) el tipo de simetría que tiene esta gráfica
2) si f es función par, impar o ninguna de las dos
3) si f es una función uno-a-uno

2) Usando la prueba algebraica determina si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

b) $g(x) = x^3 - 3x$

c) $F(t) = 3t^2 + 2t$

d) $H(x) = \sqrt{9 - x^2}$

e) $r(a) = \dfrac{1}{a + 3}$

3) Halla los interceptos en x y el intercepto en y de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x - 10$

b) $g(x) =$ 5x

c) $h(x) = x^2 - 4$

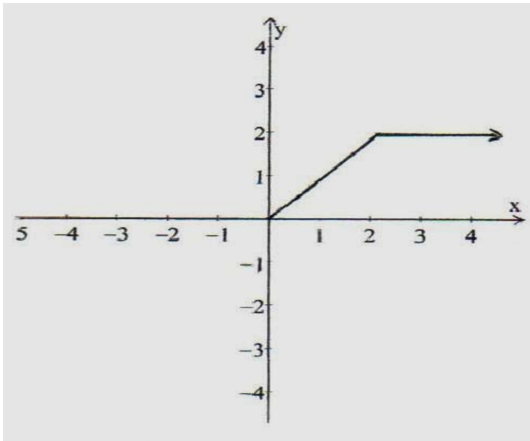
d) $f(x) = x^2 + 9$

e) $n(x) = x^2 - 5x + 6$

f) $q(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$

CONTINUACIÓN DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA II:

4) A continuación aparece la gráfica de la función h. Completa esta gráfica para que sea simétrica con respecto al :
a) eje de y b) origen



OPERACIONES CON FUNCIONES

I. ÁLGEBRA DE FUNCIONES

DEFINICIÓN: Sea D la intersección del dominio de f y el dominio de g. Sea x un elemento de D. Entonces:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

c) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

NOTACIÓN:

D_{f+g} : dominio de la función $f+g$

D_{f-g} : dominio de la función $f-g$

D_{fg} : dominio de la función fg

$D_{\frac{f}{g}}$: dominio de la función $\dfrac{f}{g}$

DOMINIO

El dominio de las funciones $f+g$, $f-g$ y fg es la intersección del dominio de f y el dominio de g. Recuerda que la intersección entre dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos en común de ambos conjuntos. El dominio de la función $\dfrac{f}{g}$ es la intersección del dominio de f y el dominio de g, tal que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO:

1) Sea $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$. Halla:

a) $(f+g)(-1)$

b) $(f-g)(-1)$

c) $(fg)(3)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3)$

e) $(f+g)(x)$

f) $(f-g)(x)$

g) $(fg)(x)$

h) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

i) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

j) el dominio de $f+g, f-g, fg$ y $\dfrac{f}{g}$

SOLUCIÓN: $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $g(x) = 2x + 3$

a) $f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 1 = -3$, $g(-1) = 2(-1) + 3 = 1$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1)$$
$$= -3 + 1 = -2$$

b) $(f-g)(-1) = f(-1) - g(-1)$

$$= -3 - 1 = -4$$

c) $f(3) = 3^2 + 3(3) - 1 = 17$, $g(3) = 2(3) + 3 = 9$

$$(fg)(3) = (f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3)$$
$$= 17(9)=153$$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3) = \dfrac{f(3)}{g(3)} = \dfrac{17}{9}$

e) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= (x^2 + 3x - 1) + (2x + 3) = x^2 + 5x + 2$$

f) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= (x^2 + 3x - 1) - (2x + 3) = x^2 + 3x - 1 - 2x - 3 = x^2 + x - 4$$

g) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$= (x^2 + 3x - 1)(2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 9x - 2x - 3$$
$$= 2x^3 + 9x^2 + 7x - 3$$

h) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{2x + 3}$

CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR:

i) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-1}$

j) dominio de $f+g,\ f-g,\ f\,g$ y $\dfrac{f}{g}$

$D_f = \Re \qquad\qquad D_g = \Re$

$\therefore\ D_f \cap D_g = \Re$

$\therefore\ D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\,g} = D_f \cap D_g = \Re$

Para hallar el dominio de $\dfrac{f}{g}$, hay que hallar los valores de x donde $g(x) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
g(x) &\neq 0 \\
2x+3 &\neq 0 \\
2x &\neq -3 \\
x &\neq \frac{-3}{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ D_{\frac{f}{g}} = \{x : x \in D_f \cap D_g \ \ y \ \ g(x) \neq 0\} = \left\{x : x \neq \dfrac{-3}{2}\right\}$

II. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Suponer que tenemos estas funciones: $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^3$. Entonces:

$2 \xrightarrow{g} g(2) \xrightarrow{f} f(g(2))$ ó $2 \xrightarrow{g} 8 \xrightarrow{f} 9$.

El proceso anterior se puede generalizar de la siguiente manera:

$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$, donde $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$.

Según se observa, se aplica primero la función g y obtenemos $g(x)$. A $g(x)$ le aplicamos la función f y obtenemos $f(g(x))$. Lo antes descrito se conoce como la composición de las funciones f y g.

DEFINICIÓN: Sean f y g dos funciones tal que $x \in D_g$ y $g(x) \in D_f$. La composición de las funciones f y g, denotada por $f \circ g$, se define como: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Veamos cómo se definen las siguientes composiciones de funciones:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, donde $x \in D_f$ y $f(x) \in D_g$

b) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$, donde $x \in D_f$ y $f(x) \in D_f$

c) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$, donde $x \in D_g$ y $g(x) \in D_g$

EJEMPLOS:

1) Sea $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Halla:

a) $(f \circ g)(9)$
b) $(g \circ f)(9)$
c) $(f \circ f)(-1)$
d) $(f \circ g)(x)$
e) $(g \circ f)(x)$
f) $(f \circ f)(x)$

SOLUCIÓN:

a) $(f \circ g)(9) = f(g(9))$ $\qquad g(9) = \sqrt{9} = 3$

$= f(3)$

$= (3)^2 + 1 = 10$

b) $(g \circ f)(9) = g(f(9))$ $\qquad f(9) = (9)^2 + 1 = 82$

$= g(82)$

$= \sqrt{82}$

OBSERVACIÓN: $(f \circ g)(9) \neq (g \circ f)(9)$

El resultado anterior nos indica que la composición de funciones **no** es conmutativa.

$\therefore (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, donde se cumple con los dominios establecidos en la definición

c) $(f \circ f)(-1) = f(f(-1))$ $\qquad f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$= f(2)$

$= (2)^2 + 1 = 5$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1$

e) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$= f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$

2) Halla dos funciones f y g tal que $H = f \circ g$:

a) $H(x) = (x^5 + 3)^2$

b) $H(x) = \left| x - x^3 \right|$

SOLUCIÓN:

a) Recordemos que al hallar $f \circ g$, la primera función que se aplica es g. Al observar la función H, vemos que el primer proceso que se realiza es el que está dentro del paréntesis.

$\therefore \; g(x) = x^5 + 3$

Entonces observamos que el último proceso que se realiza es el que está fuera del paréntesis.

$\therefore \; f(x) = x^2$

Verificación: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3) = (x^2 + 3)^2 = H(x)$

b) El primer proceso que se realiza es el que está dentro del valor absoluto.

$\therefore \; g(x) = x - x^3$

El último proceso que se efectua es hallar el valor absoluto.

$\therefore \; f(x) = |x|$

Verificación: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - x^3) = \left| x - x^3 \right| = H(x)$

DOMINIO DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

NOTACIÓN:

$D_{f \circ g}$: dominio de la función $f \circ g$

$D_{g \circ f}$: dominio de la función $g \circ f$

El dominio de $f \circ g$ está compuesto por todos los valores de x en el dominio de g, tal que $g(x)$ está en el dominio de f. Otra forma de explicar el dominio de $f \circ g$ es diciendo que son todos los valores de x en el dominio de g, para los cuales $f \circ g$ está definida.

EJEMPLOS:

1) Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:

a) el dominio de $f \circ g$

b) el dominio de $g \circ f$

SOLUCIÓN:

a) 1) Hallar el dominio de g. (Esto es, hallar el dominio de la primera función que se aplica en la composición que estamos trabajando.)

$g(x) = \sqrt{x}$

$x \geq 0$

$\therefore D_g = [0, \infty)$

2) Hallar $f \circ g$.

Habíamos obtenido: $(f \circ g)(x) = x + 1$.

3) Determinar si $f \circ g$ está definida en el dominio de g. Observamos que sí lo está.

$\therefore$ En este ejemplo, $D_{f \circ g} = D_g = [0, \infty)$.

b) $D_f = \Re$

Habíamos obtenido: $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Observa que $g \circ f$ está definida para todo número real, ya que $x^2 + 1 \geq 0$ para todo $x \in \Re$.

$\therefore$ En este ejemplo, $D_{g \circ f} = D_f = \Re$.

2) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{3}{x-1}$. Halla:

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

c) $D_{f \circ g}$

d) $D_{g \circ f}$

SOLUCIÓN:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= f\left(\frac{3}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{\dfrac{3}{x-1}}\right) = 1\left(\frac{x-1}{3}\right) = \frac{x-1}{3}$$

CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR:

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{3}{\frac{1-x}{x}} = 3\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{3x}{1-x}$$

c) Hallamos primero el D_g .

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$\therefore \quad D_g = \{x : x \neq 1\}$

Observa que $f \circ g$ está definida para toda $x \in D_g$.

$\therefore$ En este ejemplo, $D_{f \circ g} = D_g = \{x : x \neq 1\}$.

d) Hallamos primero el D_f .

$x \neq 0$

$\therefore D_f = \{x : x \neq 0\}$

Observa que $g \circ f$ no está definida para: $1 - x = 0$.

$\therefore 1 - x \neq 0$

$1 \neq x$ ó $x \neq 1$

$\therefore$ Al dominio de f le añadimos esta restricción.

$\therefore D_{g \circ f} = \{x : x \neq 0,\ x \neq 1\}$

OBSERVACIÓN:
El dominio de una composición de funciones no siempre es el dominio de la primera función que se aplica. Esto se observa en la parte d) del ejemplo anterior.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA III:

1) Sea $f(x) = 4x$ y $g(x) = x^3 - x$. Halla:

a) $(f + g)(1)$

b) $(f - g)(-2)$

c) $(f\,g)(2)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

e) $(f + g)(x)$

f) $(f - g)(x)$

g) $(f\,g)(x)$

h) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

i) el dominio de $f + g,\ f - g,\ f\,g$ y $\frac{f}{g}$

CONTINUACIÓN DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA III:

2) Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{3}{x}$. Halla:

a) $(f \circ g)(-1)$
b) $(g \circ f)(4)$
c) $(f \circ f)(1)$
d) $(f \circ g)(x)$
e) $(g \circ f)(x)$
f) el dominio de $f \circ g$
g) el dominio de $g \circ f$

3) Halla dos funciones f y g tal que $K = f \circ g$:

a) $K(x) = \dfrac{7}{2x-1}$
b) $K(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$

FUNCIONES INVERSAS

En la introducción de este módulo, habíamos mencionado que una función actúa como una máquina. Suponer que la función f es una función uno-a-uno. Imaginemos a la función f como una máquina que le está realizando un proceso a la variable x y que el resultado de este proceso es $f(x)$. Pensemos en otra función g, la cual le realiza un proceso a $f(x)$ y el resultado es x. Decimos entonces que g es la función inversa de la función f. O sea, la función inversa deshace el proceso que hizo la función , ya que empezamos con un valor x al cual le aplicamos la función f y obtenemos $f(x)$, luego aplicamos la función g y volvemos a x.

Esto es: $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} x$ ó $\begin{array}{l} x \xrightarrow{f} f(x) \\ x \xleftarrow{g} f(x) \end{array}$.

Sólo las funciones que son uno-a-uno tienen función inversa. Podemos decir entonces: una función f tiene función inversa si y sólo si f es una función uno-a-uno.
O sea, si la función no es uno-a-uno, la correspondencia inversa no es una función porque en la correspondencia inversa habrían pares ordenados distintos repitiendo el primer elemento del par ordenado.

DEFINICIÓN: Sea f una función uno-a-uno cuyo dominio es D y cuyo campo de valores es R. Una función g cuyo dominio es R y su campo de valores es D es la función inversa de la función f, si se cumple la siguiente condición para todo x en D y para todo y en R:
$y = f(x)$ si y sólo si $x = g(y)$.

Esta definición implica que la función f es la inversa de la función g.
Por lo tanto, la función g es la inversa de la función f si se cumplen las siguientes dos condiciones:

i) $g(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f
ii) $f(g(x)) = x$ para todo x en el dominio de g

Usaremos la siguiente notación para la función inversa de la función f : f^{-1}.

CUIDADO: El símbolo f^{-1} es una notación. El -1 usado en f^{-1} **no** es un exponente. Esto es, f^{-1} **no** es el recíproco de f.

Por lo tanto, podemos escribir las condiciones anteriores así :

i) $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f

ii) $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x en el dominio de f^{-1}

O sea,

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(f(x)) = x \;, \qquad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

$$x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x) \xrightarrow{f} f(f^{-1}(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f^{-1}$$

EJEMPLO 1: Sea $f = \{(1,2),(3,6),(4,8),(5,10)\}$. Halla:

a) f^{-1}
d) $D_{f^{-1}}$
b) D_f
e) $CV_{f^{-1}}$
c) CV_f

SOLUCIÓN:

a) La función f es una función 1-1, por lo tanto podemos hallar su función inversa. Para obtener f^{-1} se invierten los pares ordenados.
$f^{-1} = \{(2,1),(6,3),(8,4),(10,5)\}$

b) $D_f = \{1,3,4,5\}$
d) $D_{f^{-1}} = \{2,6,8,10\}$

c) $CV_f = \{2,6,8,10\}$
e) $CV_{f^{-1}} = \{1,3,4,5\}$

OBSERVACIÓN: Dominio de f = Campo de Valores de f^{-1}
Campo de Valores de f = Dominio de f^{-1}

EJEMPLO 2: Verifica que g es la función inversa de la función f :

1) $f(x) = 4x + 1$; $g(x) = \dfrac{x-1}{4}$

2) $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$

SOLUCIÓN:
Tenemos que verificar:
i) $g(f(x)) = x$
ii) $f(g(x)) = x$

COMENTARIO: Al hacer las dos verificaciones anteriores, estamos demostrando que una función es la inversa de la otra.

1) $f(x) = 4x+1 \quad ; \quad g(x) = \dfrac{x-1}{4}$

$$g(f(x)) = g(4x+1) = \frac{(4x+1)-1}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{4}\right) = 4\left(\frac{x-1}{4}\right) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$\therefore$ g es la inversa de f

2) $f(x) = x^3 \quad ; \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

$\therefore$ g es la inversa de f

EJEMPLO 3: Demuestra que una función es la inversa de la otra:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \frac{x}{1} = x$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \frac{x}{1} = x$$

$\therefore$ Una función es la inversa de la otra.

CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR:

2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

$$g(f(x))=g\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\frac{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)+1}{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)-2}=\frac{\frac{2x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}}{\frac{2x+1}{x-1}-\frac{2(x-1)}{x-1}}=\frac{\frac{2x+1+x-1}{x-1}}{\frac{2x+1-2x+2}{x-1}}=\frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}$$

$$=\frac{3x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

$$f(g(x))=f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\frac{2\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+1}{\frac{x+1}{x-2}-1}=\frac{\frac{2x+2}{x-2}+1}{\frac{x+1}{x-2}-1}=\frac{\frac{2x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x-2}}{\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}}=\frac{\frac{2x+2+x-2}{x-2}}{\frac{x+1-x+2}{x-2}}$$

$$=\frac{\frac{3x}{x-2}}{\frac{3}{x-2}}=\frac{3x}{x-2}\cdot\frac{x-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

$\therefore$ Una función es la inversa de la otra.

OBSERVACIÓN: Cuando una función f es creciente (o decreciente) en un intervalo I, entonces f es una función 1-1 en I. Esto se debe a que cuando una función es creciente o decreciente en un intervalo I, sus pares ordenados distintos no repiten el segundo elemento del par. Por lo tanto, son funciones 1-1 en el intervalo I.

GUIAS A SEGUIR PARA HALLAR LA FUNCIÓN INVERSA:

Suponer que queremos hallar la función inversa de la función f, que está expresada en x.

I. Verificar que f es una función 1-1 en todo su dominio, a menos que el ejercicio lo indique.

II. Hallar el dominio y el campo de valores de f.

III. Cambiar $f(x)$ por y.

IV. Intercambiar x y y.

V. Resolver para y la ecuación obtenida en el paso anterior.

VI. Reemplazar y por $f^{-1}(x)$.

VII. Verificar:

a) $f^{-1}(f(x))=x$, para todo x en el dominio de f

b) $f(f^{-1}(x))=x$, para todo x en el dominio de f^{-1}

EJEMPLO 1: Las siguientes funciones son funciones 1-1. Halla su función inversa.

1) $f(x) = 3x - 1$

2) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

3) $f(x) = \sqrt{x-1}$

4) $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$

SOLUCIÓN:

1) $f(x) = 3x - 1$

Como f es una función lineal, entonces su dominio es $\Re$. Su campo de valores también es $\Re$. Para hallar el campo de valores de la función, podemos pensar en la gráfica de la función o en una tabla de valores.

$\therefore\ D_{f^{-1}} = CV_{f^{-1}} = \Re$

$$y = 3x - 1$$
$$x = 3y - 1$$
$$\frac{x+1}{3} = y \qquad \text{ó} \qquad y = \frac{x+1}{3}$$
$$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

Verificación:

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-1) = \dfrac{(3x-1)+1}{3} = \dfrac{3x}{3} = x$, para todo $x \in \Re$

b) $f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = 3\left(\dfrac{x+1}{3}\right) - 1 = (x+1) - 1 = x$, para todo $x \in \Re$

2) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

Como g está definida en términos de una raíz de índice impar, entonces el dominio de g es $\Re$. Su campo de valores también es $\Re$.

$\therefore\ D_{g^{-1}} = CV_{g^{-1}} = \Re$

$$y = \sqrt[3]{x} - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y} - 2$$
$$x + 2 = \sqrt[3]{y}$$

$(x+2)^3 = \left(\sqrt[3]{y}\right)^3$ (Elevamos al cubo en ambos lados de la ecuación para eliminar el radical.)

$(x+2)^3 = y \qquad$ ó $\qquad y = (x+2)^3$

$$\therefore\ g^{-1}(x) = (x+2)^3$$

CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR:

Verificación:

a) $g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(\sqrt[3]{x}-2\right) = \left(\left(\sqrt[3]{x}-2\right)+2\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$, para todo $x \in \Re$

b) $g\,(g^{-1}(x)) = g\left((x+2)^3\right) = \sqrt[3]{(x+2)^3} - 2 = (x+2)-2 = x$, para todo $x \in \Re$

3) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Hallemos el dominio el de f.

$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

$\therefore\ D_f = [1,\infty)$

Para hallar el campo de valores, observemos la siguiente tabla de valores de f :

x	y
1	0
2	1
3	$\sqrt{2}$
4	$\sqrt{3}$
5	2

$\therefore\ CV_f = [0,\infty)$; $D_{f^{-1}} = [0,\infty)$; $CV_{f^{-1}} = [1,\infty)$ **:**

$y = \sqrt{x-1}$

$x = \sqrt{y-1}$

$x^2 = \left(\sqrt{y-1}\right)^2$ (Elevamos al cuadrado en ambos lados de la ecuación para eliminar el radical.)

$x^2 = y-1$

$x^2+1 = y$ ó $y = x^2+1$

$\therefore\ f^{-1}(x) = x^2+1$, para $x \geq 0$ (ya que el dominio de f^{-1} es $[0,\infty)$)

Verificación:

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\sqrt{x-1}\right) = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1 = (x-1)+1 = x$, para $x \geq 1$ porque el $D_f = [1,\infty)$

b) $f(f^{-1}(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, para $x \geq 0$ porque el $D_{f^{-1}} = [0,\infty)$

4) $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$

Dominio de g :

$x-3\neq 0$

$x\neq 3$

$\therefore\ D_g=\{x : x\neq 3\}=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

Campo de Valores de g :

El cero es el único número real que no está en el campo de valores de g , ya que para g ser cero, tendría que ser cero el numerador de la fracción. Pero el numerador no puede ser cero, ya que tiene valor de 1.

$\therefore\ CV_g=\{y : y\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$\therefore\ D_{g^{-1}}=\{x : x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$CV_{g^{-1}}=\{y : y\neq 3\}=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

$$y=\frac{1}{x-3}$$

$$x=\frac{1}{y-3}$$

$x(y-3)=1$ (Se eliminó el denominador multiplicando por $(y-3)$ a ambos lados.)

$xy-3x=1$

$xy=1+3x$

$y=\dfrac{1+3x}{x}$

$\therefore\ g^{-1}(x)=\dfrac{1+3x}{x}$

Verificación:

a) $g^{-1}(g(x))=g^{-1}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)=\dfrac{1+3\left(\dfrac{1}{x-3}\right)}{\dfrac{1}{x-3}}=\dfrac{\dfrac{(x-3)+3}{x-3}}{\dfrac{1}{x-3}}=\dfrac{\dfrac{x}{x-3}}{\dfrac{1}{x-3}}=\dfrac{x}{x-3}\cdot\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{x}{1}=x$,

(para todo $x\neq 3$)

b) $g(g^{-1}(x))=g\left(\dfrac{1+3x}{x}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{1+3x}{x}-3}=\dfrac{1}{\dfrac{1+3x-3x}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}=1\cdot\dfrac{x}{1}=x$, para todo $x\neq 0$

EJEMPLO 2: Si $f(x)=2x^3+1$, halla f^{-1}.

SOLUCIÓN:

La función f es una función 1-1 en todo su dominio ya que es una función creciente en todo su dominio. El dominio de f es $\Re$ porque f es una función polinomial de grado 3. De su gráfica se observa que el campo de valores de f es también $\Re$.

$\therefore \quad D_{f^{-1}} = CV_{f^{-1}} = \Re$

$$y = 2x^3 + 1$$

$$x = 2y^3 + 1$$

$$x - 1 = 2y^3$$

$$\frac{x-1}{2} = y^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} = \sqrt[3]{y^3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} = y \qquad \text{ó} \qquad y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} \ ,$$

$$\therefore \ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$$

Verificación:

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x^3+1) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3+1)-1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$, para todo $x \in \Re$

b) $f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}\right)^3 + 1 = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = (x-1)+1 = x$, para todo $x \in \Re$

Hay funciones que no son 1-1 y por lo tanto no tienen función inversa. Para que sean 1-1 se le restringe el dominio. Veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO: Sea $f(x) = x^2 + 1$, para $x \geq 0$. Halla f^{-1}.

SOLUCIÓN:
El dominio de $g(x) = x^2 + 1$ es $\Re$. Su gráfica es una parábola cóncava hacia arriba y con vértice en (0,1). Por lo tanto, g no es una función 1-1 y no tiene función inversa. Se restringe el dominio de g a $x \geq 0$ ó $[0, \infty)$. Llamemos a esta nueva función f. Tenemos que f es 1-1 y tiene función inversa. Entonces:

$$D_f = CV_{f^{-1}} = [0, \infty)$$

$$CV_f = D_{f^{-1}} = [1, \infty)$$

$$y = x^2 + 1, \quad x \geq 0$$

$$x = y^2 + 1, \quad y \geq 0$$

$$x - 1 = y^2$$

$$\pm\sqrt{x-1} = y$$

Como $y \geq 0$, entonces $y = \sqrt{x-1}$.

$$\therefore \; f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$$

Verificación:

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad$ para $x \geq 0$

b) $f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt{x-1}\right) = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1 = (x-1) + 1 = x, \quad$ para $x \geq 1$

RELACIÓN ENTRE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y LA GRÁFICA DE SU FUNCIÓN INVERSA

Suponer que f es una función 1-1 y que $(a,b) \in f$. O sea, $f(a) = b$. Como f es función 1-1, existe f^{-1}. Tenemos entonces que $(b,a) \in f^{-1}$. Si marcamos los puntos (a,b) y (b,a) en el mismo sistema cartesiano, observamos que el segmento que tiene estos puntos como extremos es perpendicular a la recta $y = x$ y además esta recta biseca dicho segmento. Por lo tanto, el punto (b,a) es la reflexión del punto (a,b) a través de la recta $y = x$ y viceversa. Este resultado está expresado en el siguiente teorema:

TEOREMA: Sea f una función uno-a-uno. La gráfica de f y la gráfica de f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

EJEMPLO 1: Traza las siguientes gráficas en el mismo sistema cartesiano:
$f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $y = x$.

SOLUCIÓN:

$f(x) = x^3$

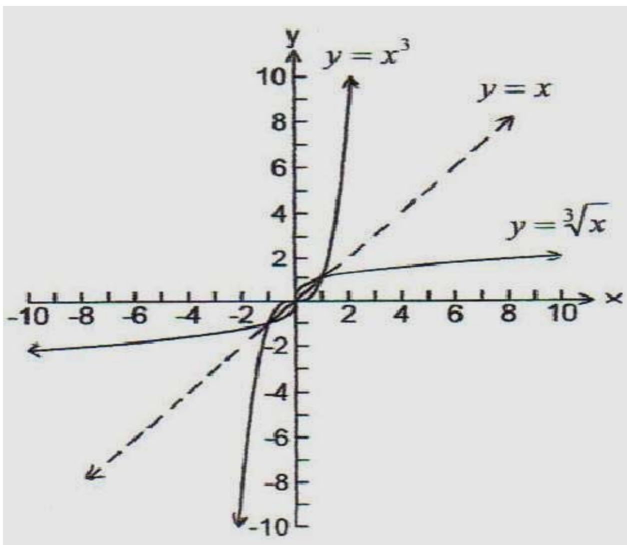
x	y
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

x	y
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2

$y = x$

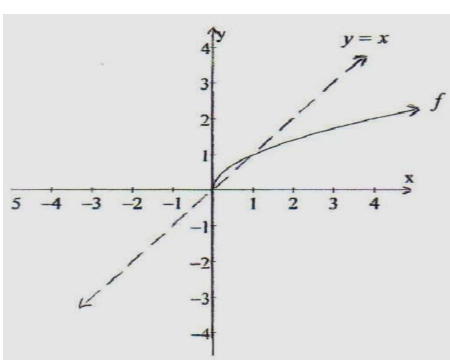
x	y
-1	-1
0	0
1	1



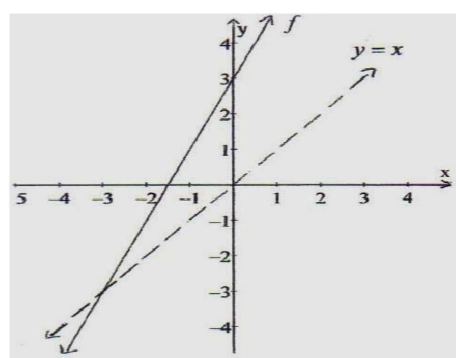
OBSERVACIÓN: Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

EJEMPLO 2: La gráfica de la función f aparece a continuación. Traza la gráfica de f^{-1} en el mismo sistema cartesiano. Por conveniencia también aparece la gráfica de $y = x$.

1)

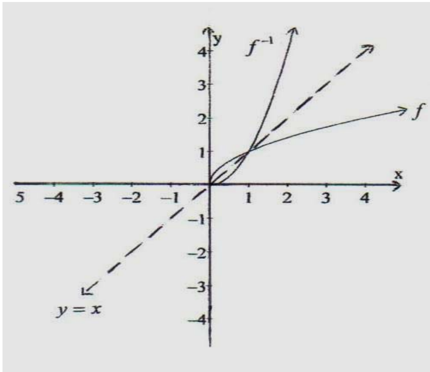


2)

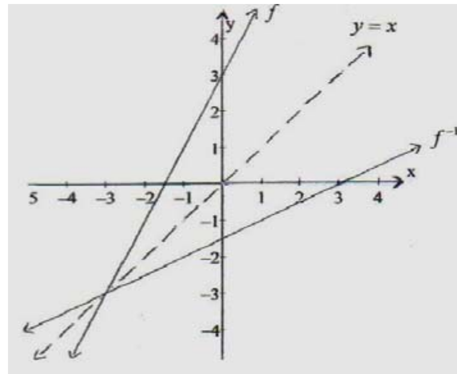


SOLUCIÓN:

1)



2)



EJERCICIOS DE PRÁCTICA IV:

1) Demuestra que una función es la inversa de la otra:

$$f(x) = 2x^3 - 5 \; ; \qquad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{2}} \; .$$

2) Las siguientes funciones son 1-1. Halla su función inversa.

a) $f(x) = 3x - 7$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$

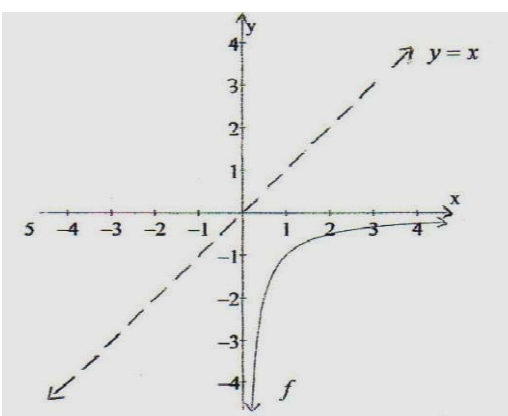
3) Halla la función inversa , si existe:

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x - 1$

b) $g(x) = x^2 + 5, \;\; x \geq 0$

c) $h(x) = 2 - x^4$

4) La gráfica de la funión f aparece a continuación. Traza la gráfica de f^{-1} en el mismo sistema cartesiano. Por conveniencia también aparece la gráfica de $y = x$.



EJERCICIOS ADICIONALES:

1) ¿ Cuáles de las siguientes relaciones representan funciones?

a) $f = \{(7,8),(8,9),(4,5),(7,1)\}$

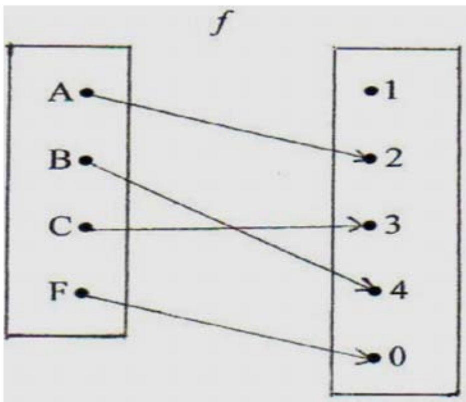
b) $g = \{(3,0),(4,0),(5,0),(1,2)\}$

c) $h = \{(x,y) : y^4 = x\}$

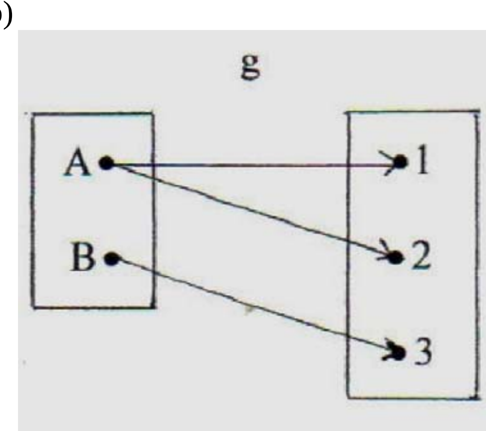
d) $k = \{(x,y) : y = x\}$

2) ¿ Cuáles de las siguientes correspondencias representan funciones?

a)

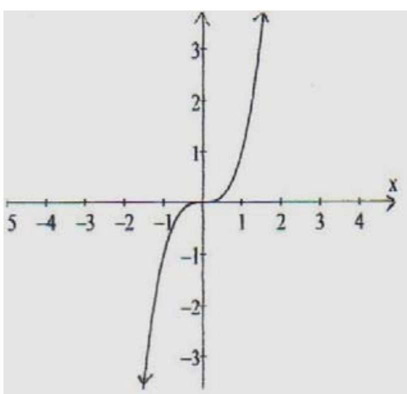


b)

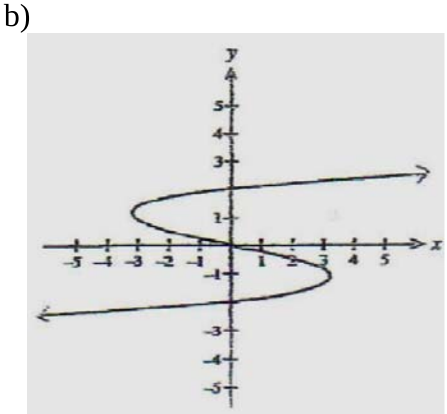


3) ¿ Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones?

a)



b)



4) Si $f(x) = x^2 + 2x$, halla:

a) el dominio de f

b) $f(-3)$

c) $f(5a)$

d) $f(x+h)$

e) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$

CONTINUACIÓN DE LOS EJERCICIOS ADICIONALES:

5) Halla el dominio de las siguientes funciones:

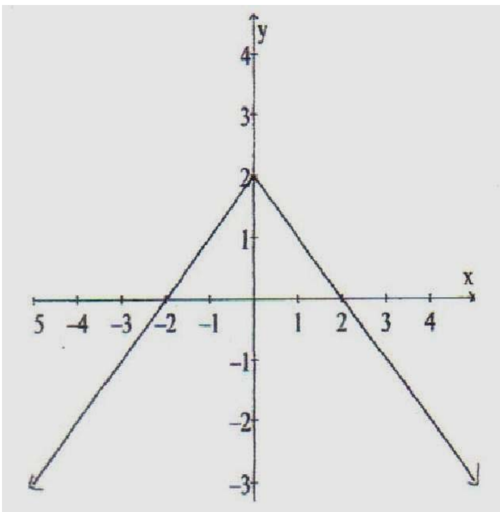
a) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 1$

b) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$

c) $g(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{2t+1}$

d) $k(x) = \dfrac{5}{x} + 3x$

6) La gráfica de la función f aparece a continuación.



Halla:

a) dominio

b) campo de valores

c) $f(0)$

d) $f(-2)$

e) interceptos en el eje de x

f) intercepto en el eje de y

g) ceros de f

h) simetría de la gráfica

i) intervalos donde f es:

1) creciente

2) decreciente

3) constante

j) valores de x donde:

1) $f(x) = 2$

2) $f(x) < 0$

3) $f(x) \geq 0$

7) Determina si la función representada por la gráfica del problema anterior es:

a) una función uno-a-uno.

b) una función par, impar o ninguna de las dos.

8) Usando la prueba algebraica, determina cuáles de las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos:

a) $f(x) = 5 - x^4$

b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $h(a) = |a| + a^2$

d) $n(x) = 2x + 4$

e) $f(x) = 2$

CONTINUACIÓN DE LOS EJERCICIOS ADICIONALES:

9) Halla los interceptos en x y el intercepto en y para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $g(x) = x^2 - 4$

c) $F(x) = 6$

d) $m(x) = x^2 + 5x + 4$

e) $k(x) = 3x^2 - 5x + 1$

10) Si $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = x + 3$, halla:

a) $(f+g)(6)$

b) $(fg)(1)$

c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(2)$

d) $(f-g)(x)$

e) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

f) el dominio de $f - g$

g) el dominio de fg

h) el dominio de $\dfrac{g}{f}$

i) $(f \circ g)(2)$

j) $(f \circ g)(x)$

k) $(g \circ f)(x)$

l) el dominio de $f \circ g$

11) Si $G(x) = \dfrac{x-4}{(x-4)^5 + 1}$ **,** halla dos funciones f y g tal que $G = f \circ g$.

12) Demuestra que una función es la inversa de la otra:

$f(x) = \dfrac{x-7}{2}$; $h(x) = 2x + 7$.

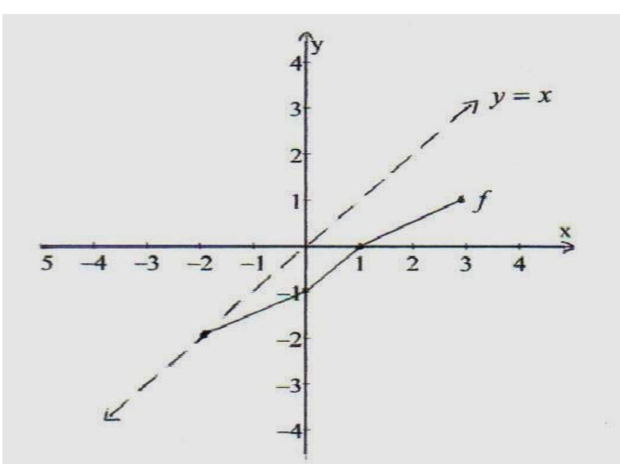
13) Las siguientes funciones son 1-1. Halla su función inversa.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 6$

b) $F(x) = \dfrac{2x}{x+3}$

14) Halla la función inversa para $g(x) = \sqrt[5]{x+4}$.

15) La gráfica de la función f aparece a continuación. Traza la gráfica de f^{-1} en el mismo sistema cartesiano. Por conveniencia también aparece la gráfica de $y = x$.

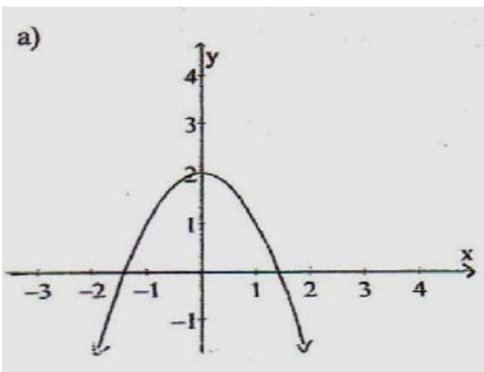


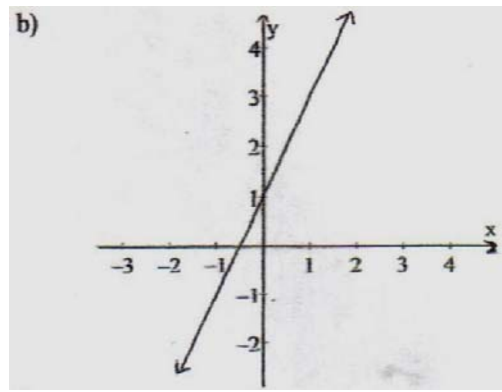
POS – PRUEBA

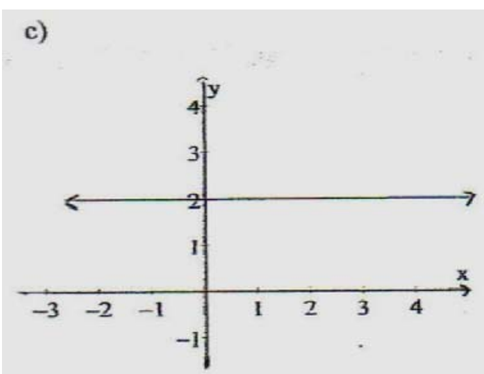
1) ¿Cuáles de las siguientes relaciones representan funciones?

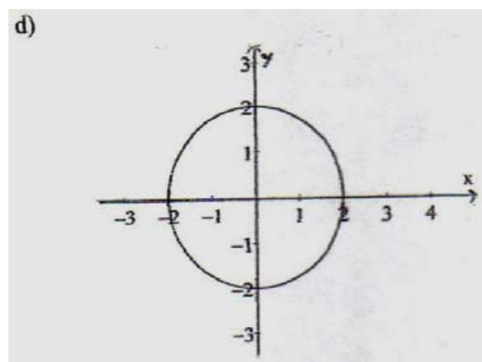
a) $f = \{(2,-2),(-3,3),(4,-4),(-5,5)\}$
b) $g = \{(5,2),(1,3),(5,4)\}$
c) $F = \{(x,y) : |x+4| - y = 0\}$
d) $G = \{(x,y) : (y-1)^2 + (x+7)^2 = 8\}$

2) ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones?



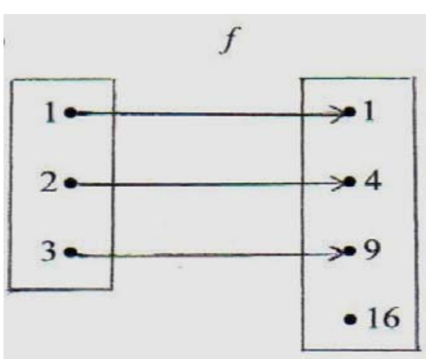




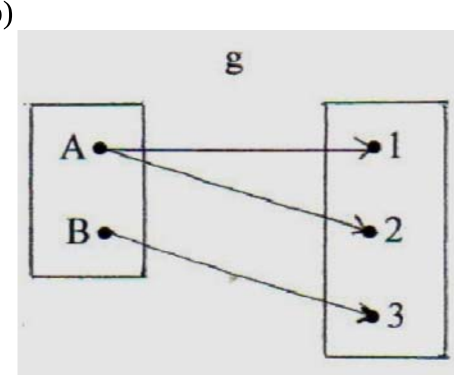


3) ¿Cuáles de las siguientes correspondencias representan funciones?

a)



b)



4) Sea $f(x)=\frac{1}{x}$. Halla:

a) el dominio de f

b) $f\left(\frac{-3}{5}\right)$

c) $f\left(\sqrt{3}\right)$

d) $f\left(\frac{1}{a}\right)$

e) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad h\neq 0$

5) Halla el dominio de las siguientes funciones:

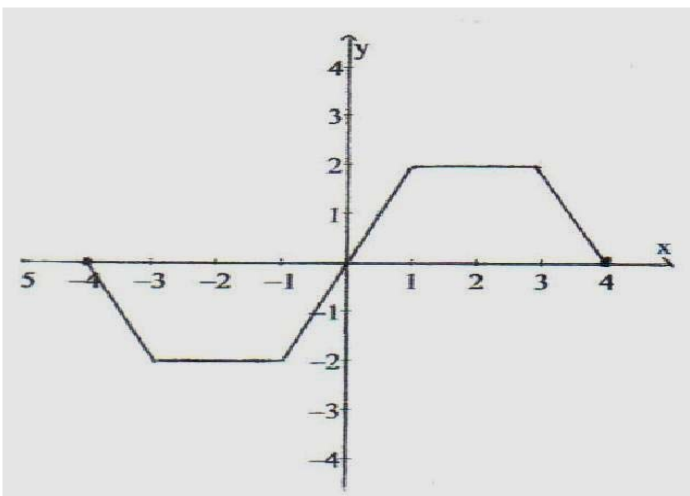
a) $f(x)=x^5-3x^3-\sqrt{2}$

b) $g(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{x-5}$

c) $h(t)=\frac{t^2-4t+2}{t^2-5}$

d) $G\ (n)=\frac{9\sqrt{n}-5\sqrt[7]{3n+4}}{10}$

6) Usando la gráfica de la función f que aparece a continuación,halla:



a) dominio

b) campo de valores

c) $f(0)$

d) $f(-2)$

e) interceptos en el eje de x

f) intercepto en el eje de y

g) ceros de f

h) simetría de la gráfica (si la tiene)

i) intervalos donde f es:

1) creciente

2) decreciente

3) constante

j) valores de x donde:

1) $f(x)=2$

2) $f(x)<0$

3) $f(x)\geq 0$

7) ¿Cuáles de las gráficas que representan funciones en el ejercicio 2, son funciones uno-a-uno?

8) ¿Cuáles de las gráficas del ejercicio 2 tienen simetría con respecto:

a) al eje de y

b) al origen

9) Usando la prueba algebraica, determina cuáles de las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos:

a) $f(x) = 3x^4 + x^2$

b) $g(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(t) = t^5 - 3t^2 + 1$

d) $n(x) = \dfrac{1}{x^6 + 1}$

10) Halla los interceptos en x y el intercepto en y para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7x + 2$

b) $g(x) = 4$

c) $H(x) = x^2 - 9$

d) $q\ (x) = 2x^2 - 7x - 4$

e) $m(x) = x^2 + x + 2$

f) $G(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x$

11) Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, halla:

a) $(f + g)(4)$

b) $(f\,g)(3)$

c) $(f - g)(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

e) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

f) dominio de la función $f + g$

g) dominio de la función $\dfrac{f}{g}$

h) dominio de la función $\dfrac{g}{f}$

12) Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:

a) $(f \circ g)(1)$

b) $(f \circ f)(-2)$

c) $(f \circ g)(x)$

d) $(g \circ f)(x)$

e) dominio de la función $f \circ g$

13) Demuestra que una función es la inversa de la otra:

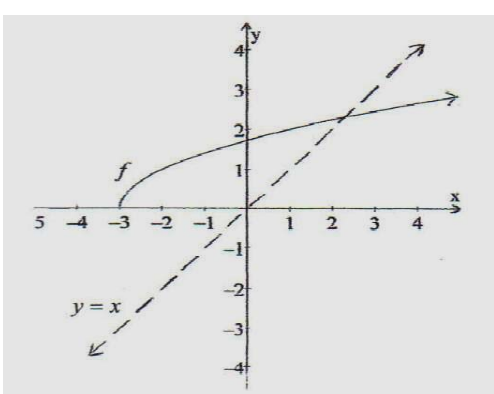
$f(x) = (x+1)^3$; $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$.

14) Las siguientes funciones son uno-a-uno. Halla su función inversa.

a) $f(x) = 4x + 12$

b) $g(x) = x^2 + 6,\quad x \geq 0$

15) La gráfica de la función f aparece a continuación. Traza la gráfica de f^{-1} en el mismo sistema cartesiano. Por conveniencia también aparece la gráfica de $y = x$.



RESPUESTAS

RESPUESTAS DE LA PRE – PRUEBA :

1) a, c 2) a, b, c 3) a

4) a) $D = \{x : x \neq 0\}$ b) $\frac{-5}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) a e) $\frac{-1}{x^2 + xh}$

5) a) $\Re$ b) $\left[\frac{1}{2}, 5\right) \cup (5, \infty)$ c) $\{t : t \neq \pm\sqrt{5}\}$ d) $[0, \infty)$

6) a) $[-4,4]$ b) $[-2,2]$ c) 0 d) -2

e) $(\pm 4,0)$; $(0,0)$ f) $(0,0)$ g) $\pm 4,0$ h) origen

i) 1) $(-1,1)$ 2) $(-4,-3)$; $(3,4)$ 3) $(-3,-1)$; $(1,3)$

j) 1) $[1,3]$ 2) $(-4,0)$ 3) $[0,4]$

7) b 8) a) a,c,d b) d

9) a) par b) impar c) ninguna d) par

10) I_x - intercepto en x I_y - intercepto en y

a) $I_x = \left(\frac{-2}{7}, 0\right)$ $I_y = (0,2)$

b) I_x - no tiene $I_y = (0,4)$

c) $I_x = (\pm 3,0)$ $I_y = (0,-9)$

d) $I_x : \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, $(4,0)$ $I_y = (0,-4)$

e) I_x - no tiene $I_y = (0,2)$

f) $I_x : (0,0), \left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, 0\right)$ $I_y = (0,0)$

11) a) 5 b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 1}$ d) $3x^2 - 5x + 2$ e) $\frac{1}{3x^2 - 5x + 2}$

f) $\{x : x \neq 1\}$ g) $\{x : x \neq 1\}$ h) $\left\{x : x \neq 1,\ x \neq \frac{2}{3}\right\}$

12) a) 2 b) 26 c) $x + 1$ d) $\sqrt{x^2 + 1}$ e) $[0, \infty)$

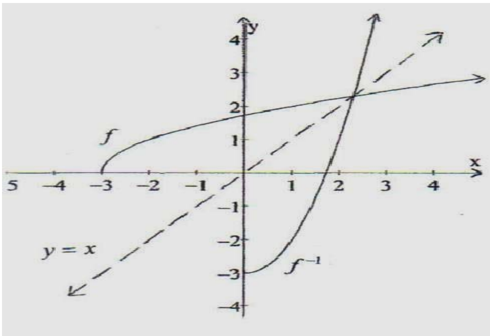
13) a) $g(f(x)) = g\left[(x+1)^3\right] = \sqrt[3]{(x+1)^3} - 1 = (x+1) - 1 = x$, para todo $x \in \Re$

b) $f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{x} - 1\right) = \left[\left(\sqrt[3]{x} - 1\right) + 1\right]^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$, para todo $x \in \Re$

14) a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 3$ b) $g^{-1}(x) = \sqrt{x - 6}$

CONTINUACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LA PRE – PRUEBA

15)



RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA I:

1) b,c 2) a $D_f = \{A, B, C, F\}$ $CV_f = \{2,3,4,0\}$

3) a, d

4) a) -5 b) $\frac{7}{2}$ c) $20n+3$ d) $4x+4h+3$ e) 4 f) $\Re$ g) 2

h) $\frac{1}{5}$ i) $\frac{3a}{3a-2}$ j) $\frac{x+h}{x+h-2}$ k) $\frac{-2}{(x+h-2)(x-2)}$ l) $\{x : x \neq 2\}$

5) a) $\left[\frac{-7}{5}, \infty\right)$ b) $[0,2]$ c) $(-\infty,4)$ d) $\Re$ e) $[-3,0) \cup (0,\infty)$ f) $\{x : x \neq \pm 3\}$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA II:

1) a) 1) $\Re$ 2) $[0,\infty)$ 3) 4 4) 3 5) 0 6) $(\pm 2,0)$ 7) ± 2 8) (0,4)

9) a) $(-2,0)$; $(2,\infty)$ b) $(-\infty,-2)$; $(0,2)$ c) { }

10) a) $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$ b) $\Re$ c) { } d) ± 2 e) ± 1

b) 1) simetría con respecto al eje de y 2) función par 3) no es función 1-1

2) a) par b) impar c) ninguna d) par e) ninguna

3) I_x = intercepto en el eje de x I_y = intercepto en el eje de y

a) $I_x = (5/2, 0)$; $I_y = (0,-10)$ b) $I_x = I_y = (0,0)$ c) $I_x = (\pm 2,0)$; $I_y = (0,-4)$

d) I_x – no tiene ; $I_y = (0,9)$ e) I_x :(3,0), (2,0) ; $I_y = (0,6)$

f) I_x :(0,0), $(1 \pm \sqrt{5}, 0)$; I_y : (0,0)

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA III:

1) a) 4 b) -2 c) 48 d) $\frac{-16}{3}$ e) x^3+3x f) $-x^3+5x$

g) $4x^4-4x^2$ h) $\frac{4x}{x^3-x}$ i) $D_{f+g}=D_{f-g}=D_{fg}=\Re$; $D_{\frac{f}{g}}=\{x : x\neq 0, x\neq \pm 1\}$

2) a) $\frac{3}{5}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{3-2x}$ e) $\frac{3x-6}{x}$

f) $\left\{x : x\neq 0, x\neq \frac{3}{2}\right\}$ g) $\{x : x\neq 0, x\neq 2\}$

3) a) $g(x)=2x-1$ $f(x)=\frac{7}{x}$

b) $g(x)=x^2-5x$ $f(x)=\sqrt[3]{x}$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA IV:

1) a) $g(f(x))=g(2x^3-5)=\sqrt[3]{\frac{(2x^3-5)+5}{2}}=\sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}}=\sqrt[3]{x^3}=x$, para todo $x\in\Re$

b) $f(g(x))=f\left(\sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}\right)=2\left(\sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}\right)^3-5=2\left(\frac{x+5}{2}\right)-5=(x+5)-5=x$, para todo $x\in\Re$

2) a) $f^{-1}(x)=\frac{x+7}{3}$ b) $f^{-1}(x)=\frac{4x}{1-x}$

3) a) La función f es creciente en todo su dominio y por lo tanto es función 1-1.

$f^{-1}(x)=3x+3$

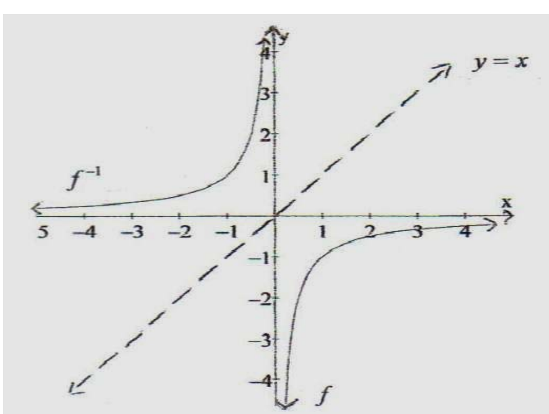
b) La función g es creciente para todo su dominio restringido que es $x\geq 0$.

Por lo tanto es función 1-1.

$g^{-1}(x)=\sqrt{x-5}$

c) No tiene función inversa porque h no es función 1-1.

4)



RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS ADICIONALES:

1) b, d 2) a 3) a

4) a) $\Re$ b) 3 c) $25a^2 + 10a$ d) $x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h$ e) $2x + h + 2$

5) a) $\Re$ b) $(3, \infty)$ c) $\left\{ t : t \neq \frac{-1}{2} \right\}$ d) $\{x : x \neq 0\}$

6) a) $\Re$ b) $(-\infty, 2]$ c) 2 d) 0 e) $(\pm 2, 0)$ f) (0,2) g) ± 2

h) eje de y i) 1) $(-\infty, 0)$ 2) $(0, \infty)$ 3) ninguno

j) 1) 0 2) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ 3) $[-2, 2]$

7) a) no es una función uno-a-uno b) par

8) a) par b) impar c) par d) ninguna e) par

9) a) $I_x = \left(\frac{1}{3}, 0 \right)$ $I_y = (0, -1)$

b) $I_x = (\pm 2, 0)$ $I_y = (0, -4)$

c) I_x - no tiene $I_y = (0, 6)$

d) $I_x : (-1, 0), (-4, 0)$ $I_y = (0, 4)$

e) $I_x = \left(\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}, 0 \right)$ $I_y = (0, 1)$

10) a) $\sqrt{5} + 9$ b) 0 c) 5 d) $\sqrt{x-1} - x - 3$ e) $\frac{\sqrt{x-1}}{x+3}$

f) $[1, \infty)$ g) $[1, \infty)$ h) $(1, \infty)$ i) 2 j) $\sqrt{x+2}$

k) $\sqrt{x-1} + 3$ l) $[-2, \infty)$ 11) $g(x) = x - 4$ $f(x) = \frac{x}{x^5 + 1}$

12) a) $h(f(x)) = h\left(\frac{x-7}{2} \right) = 2\left(\frac{x-7}{2} \right) + 7 = (x-7) + 7 = x$, para todo $x \in \Re$

b) $f(h(x)) = f(2x+7) = \frac{(2x+7)-7}{2} = \frac{2x}{2} = x$, para todo $x \in \Re$

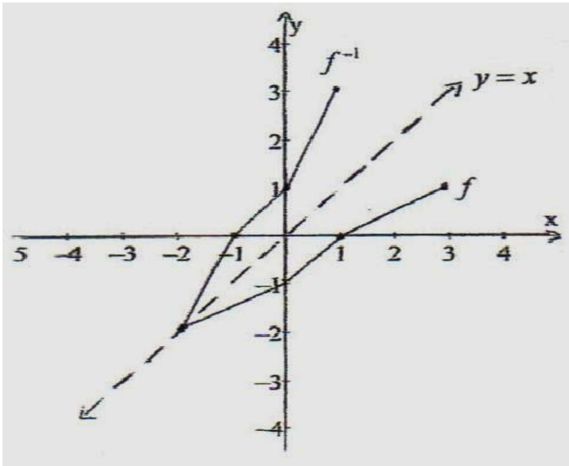
13) a) $f^{-1}(x) = 2(x-6)$ b) $f^{-1}(x) = \frac{3x}{2-x}$

14) La función g es 1-1 porque es creciente en todo su dominio. Por lo tanto, g tiene función inversa.

$g^{-1}(x) = x^5 - 4$

CONTINUACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS ADICIONALES

15)



RESPUESTAS DE LA POS – PRUEBA :

1) a, c　　　　2) a, b, c　　　　3) a

4) a) $D = \{x : x \neq 0\}$　　b) $\frac{-5}{3}$　　c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　d) a　　e) $\frac{-1}{x^2 + xh}$

5) a) $\Re$　　b) $\left[\frac{1}{2}, 5\right) \cup (5, \infty)$　　c) $\{t : t \neq \pm\sqrt{5}\}$　　d) $[0, \infty)$

6) a) $[-4,4]$　　b) $[-2,2]$　　c) 0　　d) -2

e) $(\pm 4,0)$; $(0,0)$　　f) $(0,0)$　　g) $\pm 4,0$　　h) origen

i) 1) $(-1,1)$　　2) $(-4,-3)$; $(3,4)$　　3) $(-3,-1)$; $(1,3)$

j) 1) $[1,3]$　　2) $(-4,0)$　　3) $[0,4]$

7) b

8) a) a,c,d　　b) d

9) a) par　　b) impar　　c) ninguna　　d) par

CONTINUACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LA POS – PRUEBA

10) I_x - intercepto en x $\qquad$ I_y - intercepto en y

a) $I_x = \left(\dfrac{-2}{7}, 0\right)$ $\qquad$ $I_y = (0,2)$

b) I_x - no tiene $\qquad$ $I_y = (0,4)$

c) $I_x = (\pm 3, 0)$ $\qquad$ $I_y = (0,-9)$

d) I_x : $\left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$, $(4,0)$ $\qquad$ $I_y = (0,-4)$

e) I_x - no tiene $\qquad$ $I_y = (0,2)$

f) I_x : $(0,0)$, $\left(\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ $\qquad$ $I_y = (0,0)$

11) a) 5 $\qquad$ b) $\dfrac{7}{2}$ $\qquad$ c) $\dfrac{3x^2-5x+1}{x-1}$ $\qquad$ d) $3x^2-5x+2$ $\qquad$ e) $\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$

f) $\{x : x \neq 1\}$ $\qquad$ g) $\{x : x \neq 1\}$ $\qquad$ h) $\left\{x : x \neq 1,\ x \neq \dfrac{2}{3}\right\}$

12) a) 2 $\qquad$ b) 26 $\qquad$ c) $x+1$ $\qquad$ d) $\sqrt{x^2+1}$ $\qquad$ e) $[0, \infty)$

13) a) $g(f(x)) = g\left[(x+1)^3\right] = \sqrt[3]{(x+1)^3} - 1 = (x+1) - 1 = x$, para todo $x \in \Re$

b) $f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{x} - 1\right) = \left[\left(\sqrt[3]{x} - 1\right) + 1\right]^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$, para todo $x \in \Re$

14) a) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{4}x - 3$ $\qquad$ b) $g^{-1}(x) = \sqrt{x-6}$

15)