Módulo 5:

Nivel: $10^{mo} - 12^{mo}$

Transformaciones Geométricas en el Plano

(Reflexión, Traslación y Rotación)

Por:

Prof. Mariano Martes Pagán

Catedrático, Universidad de Puerto Rico en Bayamón

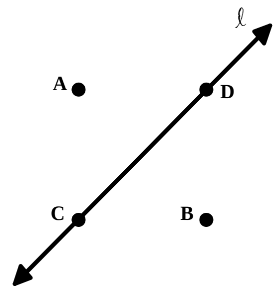
Justificación:

Las transformaciones es un tema importantísimo en las matemáticas, las ciencias, la ingeniería, la arquitectura, la fotografía, en las artes y en un sinfín de otros campos. Entre éstas, están las reflexiones, las traslaciones y las rotaciones, que tienen ciertas propiedades que no toda transformación posee y que discutiremos en el desarrollo de este módulo. Además, estas transformaciones son conceptos básicos e indispensables en el entendimiento de las matemáticas tanto elementales como avanzadas. La cantidad de aplicaciones de este tema es inmensa.

Pre - prueba:

Instrucciones: Escoja la contestación correcta.

Considere el siguiente diagrama para contestar los ejercicios 1 y 2.



1. En la figura anterior, si hacemos una reflexión sobre la recta dada, ¿cuál de los siguientes puntos es la imagen de A?

    a. A

    b. B

    c. C

    d. D

2. En la figura anterior, si hacemos una reflexión sobre la recta dada, ¿cuál de los siguientes puntos es la imagen de D?

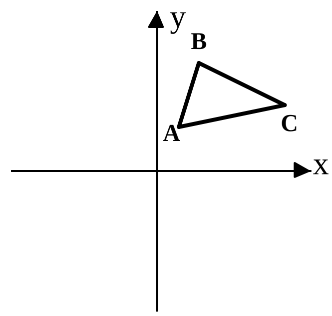
    a. A

    b. B

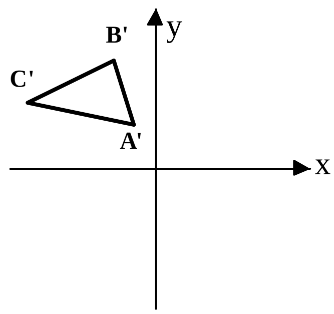
    c. C

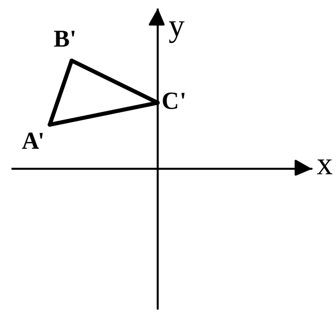
    d. D

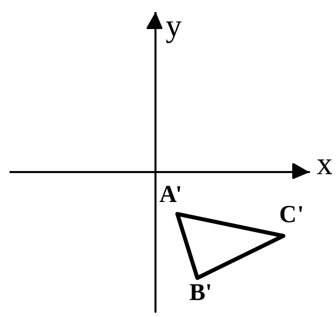
Considere el siguiente diagrama para contestar los ejercicios 3 y 4.

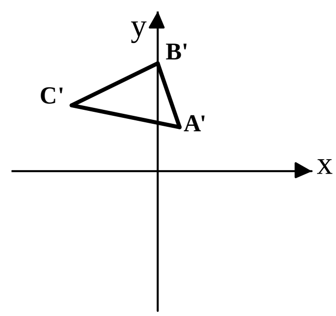


3. En la gráfica anterior, ¿cuál es la reflexión del ΔABC sobre el eje de y?

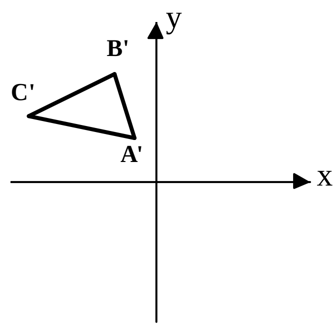
a. 

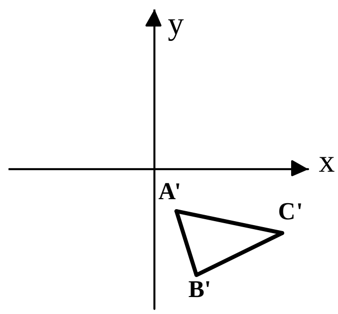
c. 

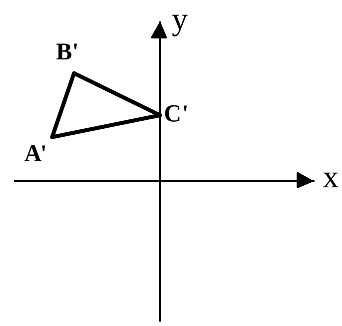
b. 

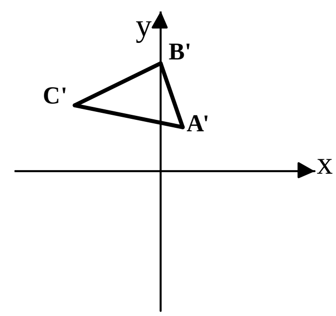
d. 

4. ¿Cuál de las siguientes es una traslación del ΔABC en la gráfica anterior?

a. 

b. 

c. 

d. 

5. Si un punto A se refleja sobre una recta que está a 6 cm de éste, ¿cuál es la distancia entre el punto A y su imagen?

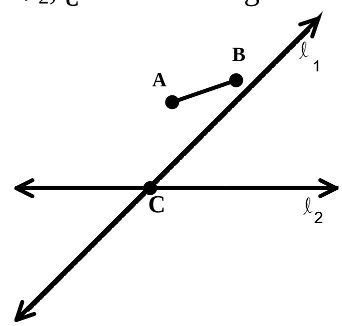
a. 3 cm

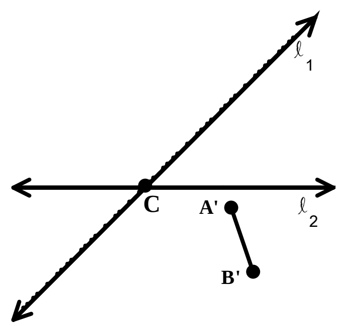
b. 6 cm

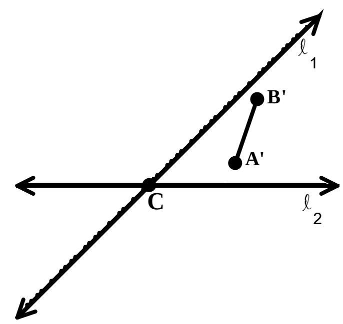
c. 12 cm

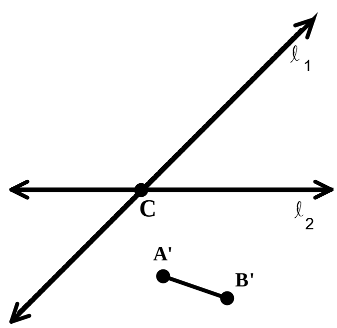
d. 18 cm

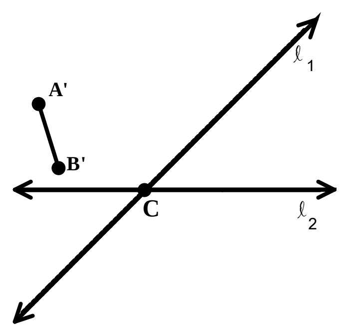
6. En la figura de la derecha se muestra el $\overline{AB}$ y dos rectas que se intersecan en el punto C. Si hacemos una rotación con respecto a las dos rectas, haciendo primero una reflexión con respecto a la recta ℓ_1 y esa reflexión la reflejamos con respecto a ℓ_2, ¿cuál de las siguientes es la imagen del $\overline{AB}$?



a. 

c. 

b. 

d. 

7. ¿Cuál de las siguientes características de un triángulo se preserva tanto en una reflexión, como en una traslación como en una rotación?

a. la medida de sus lados

b. la medida de sus ángulos

c. su área y su perímetro

d. todas las anteriores

8. ¿Cuál de las siguientes transformaciones preserva la orientación de un triángulo?

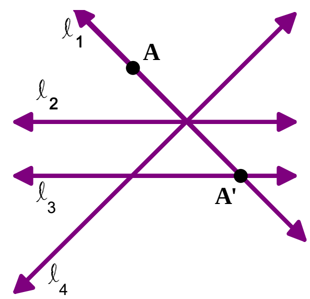
a. reflexión y traslación

b. traslación

c. traslación, rotación y reflexión

d. reflexión

9. En la siguiente gráfica se muestran cuatro rectas, un punto A y su reflexión, A′, con respecto a una de las rectas ilustradas, ¿cuál es la recta de reflexión?



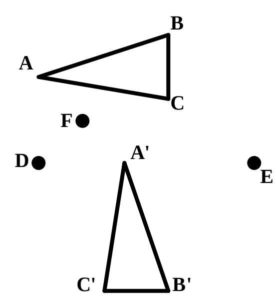
a. ℓ_1

b. ℓ_2

c. ℓ_3

d. ℓ_4

10. En la siguiente figura el ΔA'B'C' es una rotación del ΔABC. Entre los puntos ilustrados, ¿cuál es el punto de rotación?



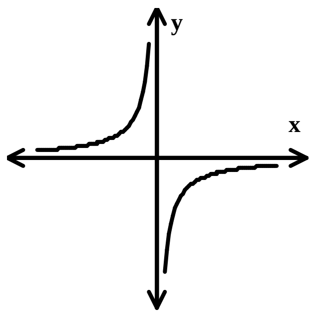
a. A

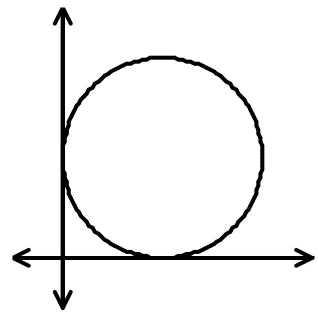
b. D

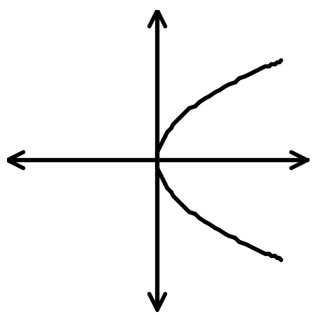
c. E

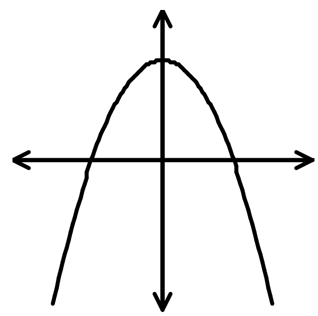
d. F

11. ¿Cuál de las siguientes gráficas es simétrica con respecto al eje de x?

a. 

c. 

b. 

d. 

12. La gráfica de la función definida por $f(x) = x^3 - 5x$ es simétrica con respecto:

a. al eje de x

b. al eje de y

c. al origen

d. no exhibe ningún tipo de simetría

13. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene una gráfica simétrica con respecto al eje de y?

a. $xy = 1$
b. $x^3 + y^2 = 1$
c. $x^2 + y^2 = xy$
d. $x^6 + x^2 = 2y + 1$

Objetivos.

Al finalizar el estudio de este módulo el participante…

1. podrá reconocer, dada una transformación en el plano, si ésta es una reflexión, una traslación, una rotación o ninguna de ellas
2. hallará la recta de reflexión, dados un punto y su imagen de reflexión.
3. hallará la reflexión, sobre una recta dada, de:
    a. un punto
    b. un segmento
    c. un triángulo
    d. cualquier otra figura
4. cotejará que la longitud de un segmento y la de su imagen son iguales, tanto en una reflexión, una traslación como en una rotación.
5. cotejará que la medida de un ángulo y la de su imagen son iguales, tanto en una reflexión, una traslación como en una rotación.
6. hallará la traslación, con respecto a dos rectas paralelas dadas, de:
    a. un punto
    b. un segmento
    c. un triángulo
    d. cualquier otro polígono
7. hallará la rotación, con respecto a dos rectas no paralelas dadas, de:
    a. un punto
    b. un segmento
    c. un triángulo
    d. cualquier otro polígono
8. identificará el punto de rotación, dado un segmento y su imagen.

9. identificará el punto de rotación, dado un triángulo y su imagen.

10. identificará el punto de rotación, dada una figura y su imagen.

11. clasificará las distintas simetrías que exhibe una gráfica dada.

12. determinará si la gráfica de una función dada es simétrica con respecto al eje de y, al origen o si ésta no tiene ninguno de estos dos tipos de simetría.

13. determinara si una función dada es par, impar o ninguna de ellas.

A. Reflexiones

Definición:

Una **<u>transformación</u>** en el plano es una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano entre sí. Si un punto P se transforma en un punto P′ a este último se le conoce como la **imagen** y a P se le llama la **preimagen**.

Ejemplos

1. Suponga que se dibuja un rectángulo sobre una lámina de goma que se estira en dirección hacia donde indican las flechas (vea figura 1). El resultado de esta transformación la podemos observar en la figura 2, donde la imagen de los vértices del rectángulo ABCD están identificados por A′, B′, C′ y D′. Así cada punto P del plano (figura 1) se transforma en un punto P′ en el mimo plano (figura 2).

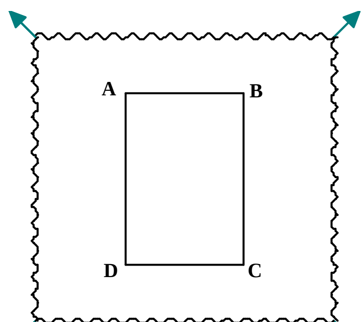


Figura 1

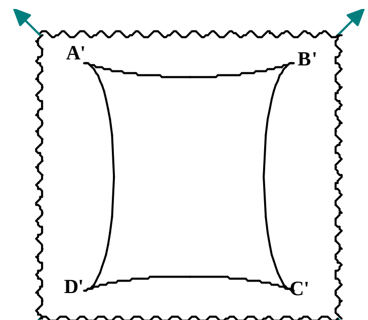
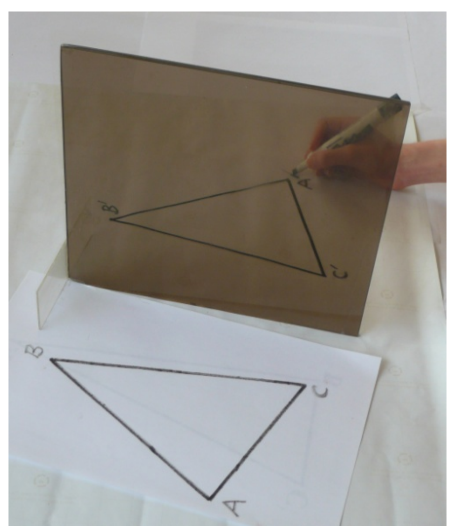


Figura 2

2. En la figura a continuación se muestra una réplica rústica de lo que se conoce como el espejo mágico de Escher. Cada punto P en el plano se transforma en otro punto P′ del plano que es el reflejo de P en el espejo. Así, cada punto del ΔABC se transforma en un punto del ΔA'B'C′.



Este último ejemplo da lugar a la siguiente definición.

Definición:

Sea ℓ una recta en un plano. Una **reflexión** sobre la recta ℓ es una transformación que proyecta cada punto P del plano sobre otro punto P′ del mismo plano de manera que:

1. Si P está en ℓ, entonces $P' = P$

2. Si P no está en ℓ, entonces ℓ es la mediatriz del $\overline{PP'}$

Notas: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento y que pasa por el punto medio de éste.

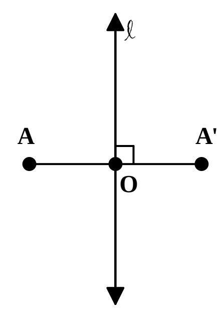
Un segmento cuyos extremos sean los puntos A y B lo representamos como $\overline{AB}$ y a su longitud como AB. A la recta que contiene los puntos A y B la representamos como $\overleftrightarrow{AB}$.

De la definición, podemos recalcar lo siguiente, vea figura:

1. La distancia entre un punto y la recta de reflexión es igual a la distancia entre la recta y la imagen de ese punto, esto es, AO = OA′.

2 Los cuatro ángulos formados por la recta y el $\overline{AA'}$ son rectos (90^o).

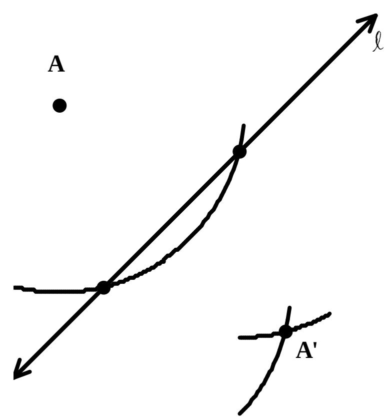
3. La distancia entre un punto y su imagen es el doble de la distancia entre el punto y la recta de reflexión.



Ejemplos:

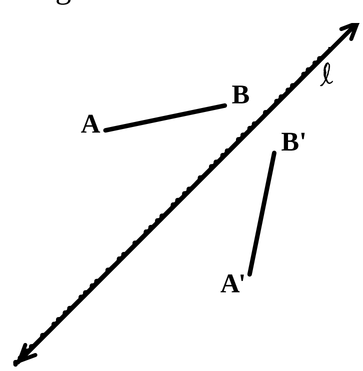
1. Dado el punto A y la recta ℓ, ¿cómo hallamos la reflexión de A sobre ℓ?

   Trace con el compás un arco con centro en A de manera que interseque a la recta ℓ en dos puntos. Trace, hacia el lado de ℓ donde no está A, dos arcos adicionales del mismo radio que el primero, pero esta vez usando como centro los puntos de intersección del primer arco con la recta ℓ. La intersección de estos últimos arcos es la imagen de A que denominamos A′.



2. Dado el $\overline{AB}$ y la recta ℓ, hallar la reflexión del segmento con respecto a ℓ.

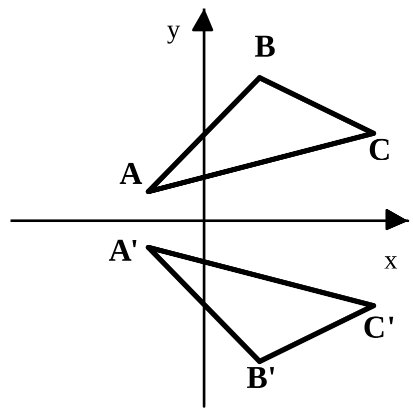
   Para hallar la imagen de un segmento sólo necesitamos hallar la imagen de los extremos. La imagen del $\overline{AB}$ es el $\overline{A'B'}$ ilustrado.



¿Cómo comparan las longitudes de estos segmentos?

3. Considere los puntos, $A(-2,1)$, $B(2,5)$ y $C(6,3)$ en el plano cartesiano, ¿cómo hallamos la reflexión del ΔABC con respecto al eje de x?

   ¡Muy bien! Localizamos estos tres puntos en un plano cartesiano y sólo tenemos que buscar la reflexión de los vértices y luego conectar estos puntos entre sí. La imagen del ΔABC es el $\Delta\text{A'B'C'}$ (vea figura).



   ¿Qué podemos afirmar sobre estos dos triángulos?

Los ejemplos y las observaciones anteriores dan lugar a las siguientes propiedades:

1. Toda reflexión conserva

   a. colinealidad
      (La imagen de un segmento es otro segmento.)

   b. intermediación de los puntos
      (Si A, B y C son tres puntos colineales y B está entre A y C entonces B′ está entre A′ y C′.)

   c. distancia
      (La longitud de un segmento y la de su imagen son iguales.)

   d. medida de ángulo ($m\angle ABC = m\angle A'B'C'$)

   e. área y perímetro de polígonos

2. La imagen de cualquier polígono, bajo una reflexión, es otro polígono congruente a éste.

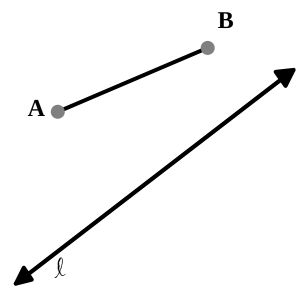
Nota: Las reflexiones no preservan orientación. Observe el ejemplo 3, si recorremos el ΔABC de A a B y luego a C lo hacemos a favor de las manecillas del reloj, mas sin embargo, en el $\Delta A'B'C'$ el recorrido se hace en contra de las manecillas del reloj.

Ejercicios.

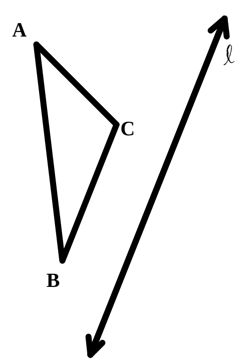
1. En la figura siguiente, halle la reflexión del $\overline{AB}$ sobre la recta ℓ, usando…

   a. un espejo mágico de Escher.

   b. usando regla y compás.



2. En la figura siguiente, halle la reflexión del ΔABC sobre la recta ℓ, usando…



   a. un espejo mágico de Escher.

   b. usando compás y regla.

3. Si la distancia entre un punto y una recta es de 20 cm, ¿cuál es la distancia entre el punto y la reflexión del punto sobre la recta?

4. Si la distancia entre un punto y su imagen de reflexión con respecto a una recta es de 10 cm, ¿cuál es la distancia entre el punto y la recta?

5. En un plano cartesiano localice los puntos $A(-2, 3)$, $B(1, -4)$ y $C(-3, -2)$. Conecte estos puntos entre sí y…

   a. halle la reflexión del ΔABC con respecto al eje de x.

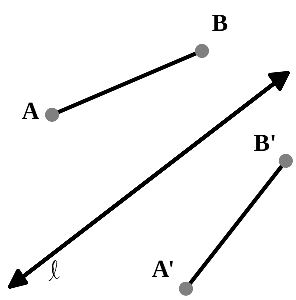
   b. halle la reflexión del ΔABC con respecto al eje de y.

   c. si el ΔA'B'C' es la imagen del ΔABC en cada una de las reflexiones anteriores, escriba las coordenadas de los vértices del ΔA'B'C' e indique cómo comparan éstas con la de los vértices del ΔABC.

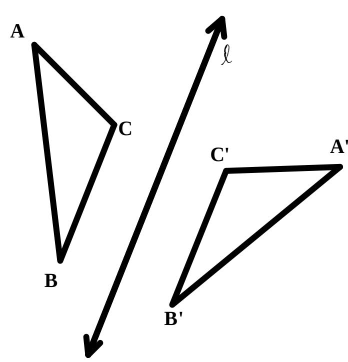
Verifique sus respuestas.

Contestaciones a los ejercicios.

1.



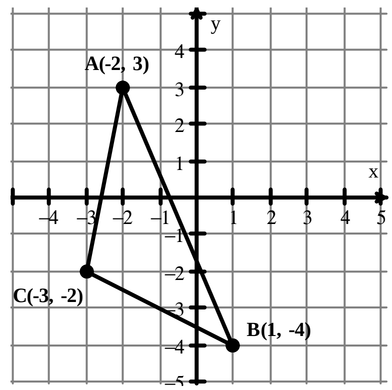
2.



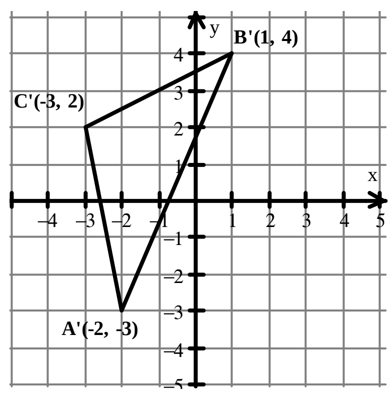
3. 40 cm

4. 5 cm

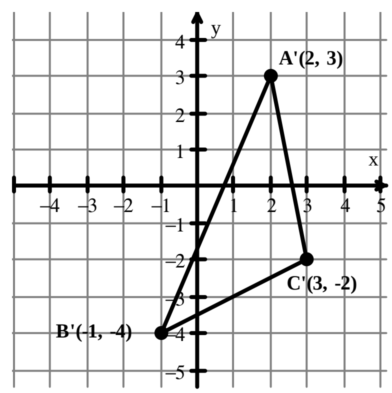
5.



a. Reflexión con respecto al eje de x



b. Reflexión con respecto al eje de y



c. Con respecto al eje de x.

$A(-2,3) \rightarrow A'(-2,-3)$

$B(1,-4) \rightarrow B'(1,4)$

$C(-3,-2) \rightarrow C'(-3,2)$

Cambia el signo de la ordenada.

Con respecto al eje de y

$A(-2,3) \rightarrow A'(2,3)$

$B(1,-4) \rightarrow B'(-1,-4)$

$C(-3,-2) \rightarrow C'(3,-2)$

Cambia el signo de la abscisa.

B. Traslaciones

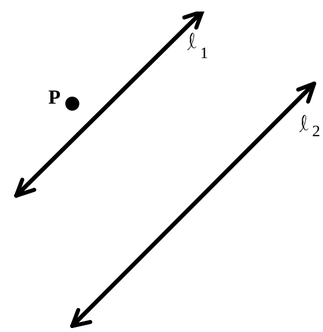
Definición:

Sea P un punto en un plano y ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas, en ese mismo plano. Una **traslación** es la composición de dos reflexiones sobre dichas rectas, de la forma siguiente:

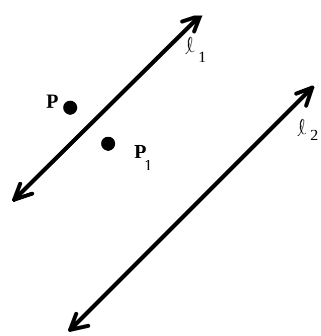
Primero se refleja el punto P sobre la recta ℓ_1 y luego se refleja esta reflexión sobre la recta ℓ_2.

Ejemplos.

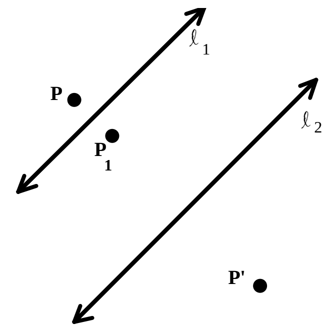
1. En la figura, se muestra un punto P y dos rectas paralelas, ℓ_1 y ℓ_2. Halle la traslación del punto P sobre estas rectas, reflejándolo primero con respecto a ℓ_1 y luego con respecto a ℓ_2.



En la siguiente gráfica, P_1 representa la reflexión del punto P con respecto a la recta ℓ_1.

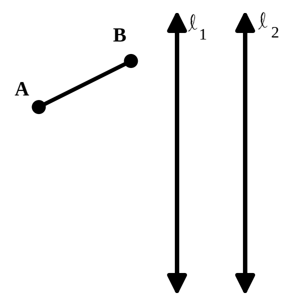


Si reflejamos P_1 sobre la recta ℓ_2, obtenemos P' que es la traslación del punto P, sobre las dos rectas.

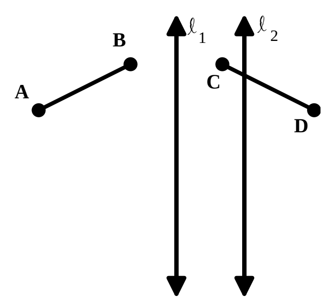


Observe que los puntos P, P_1 y P' son colineales y la recta que los contiene es perpendicular tanto a ℓ_1 como a ℓ_2. Además, la distancia entre P y ℓ_1 es igual a la distancia entre P_1 y ℓ_1, y la distancia entre P_1 y ℓ_2 es igual a la distancia entre P' y ℓ_2. Por lo tanto, la distancia ente P y P' es el doble de la distancia entre las dos rectas.

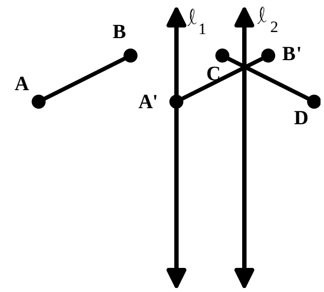
2. En la figura que se muestra a continuación, halle la traslación del $\overline{AB}$ sobre las rectas ℓ_1 y ℓ_2, reflejándolo primero con respecto a ℓ_1 y luego sobre ℓ_2.



El $\overline{CD}$ en las figuras que siguen es la reflexión del $\overline{AB}$ sobre la recta ℓ_1.

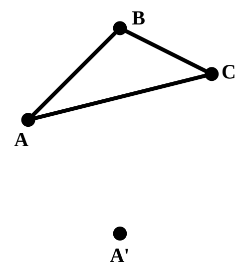


El $\overline{A'B'}$ es la reflexión del $\overline{CD}$ sobre la recta ℓ_2. Por lo tanto, el $\overline{A'B'}$ es la traslación del $\overline{AB}$ sobre las rectas ℓ_1 y ℓ_2.



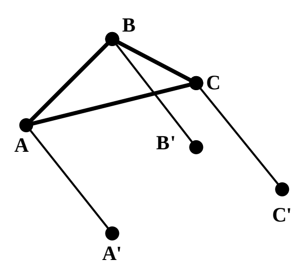
Por el ejemplo anterior, podemos concluir que la distancia entre A y A′ es igual a la distancia entre B y B′ y que es igual al doble de la distancia entre las rectas. Así, el $\overline{AB}$ se trasladó el doble de la distancia entre las rectas.

3. Considere al ΔABC en la figura a continuación y suponga que el punto marcado como A′ es una traslación del punto A. Halle la traslación (la imagen) del ΔABC.

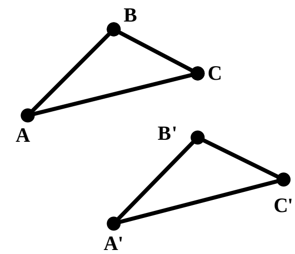


Como las traslaciones se mueven perpendiculares a las rectas, los movimientos de los puntos hacia sus imágenes son todos paralelos entre sí y de la misma magnitud.

Así, lo primero que hacemos es trazar el $\overline{AA'}$ y luego construir dos segmentos adicionales paralelos a $\overline{AA'}$ y de igual magnitud que éste; uno comenzando en B, y el otro comenzando en C. Los otros extremos de estos segmentos los denotamos como B′ y C′, respectivamente.



Si conectamos estos puntos entre sí obtenemos el $\Delta A'B'C'$.



Los ejemplos y las observaciones anteriores dan lugar a las siguientes propiedades:

1. Toda traslación conserva

   a. colinealidad
   (La imagen de un segmento es otro segmento.)

   b. intermediación de los puntos
   (Si A, B y C son tres puntos colineales y B está entre A y C entonces B′ está entre A′ y C′.)

   c. distancia
   (La longitud de un segmento y la de su imagen son iguales.)

   d. medida de ángulo ($m\angle ABC = m\angle A'B'C'$)

   e. área y perímetro de polígonos

2. La imagen de cualquier polígono, bajo una traslación, es otro polígono congruente a éste.

3. Las traslaciones preservan orientación. Observe el ejemplo anterior. Si recorremos el ΔABC de A a B y luego a C, lo hacemos a favor de las manecillas del reloj. Si hacemos lo mismo con el $\Delta A'B'C'$, el recorrido se hace también a favor de las manecillas del reloj.

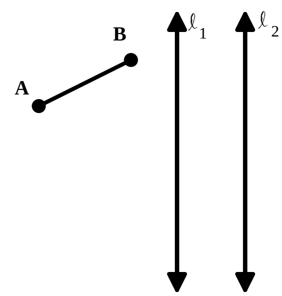
4. Bajo una traslación, todos los puntos recorren la misma distancia y en la misma dirección.

Ejercicios:

1. Si dos rectas paralelas tienen una separación de 7 cm, ¿cuál es la distancia entre cualquier punto P y su imagen bajo una traslación con respecto a estas dos rectas?

2. Si en una traslación de una figura, uno de los puntos de la figura se traslada 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia arriba, ¿qué le ocurre a los demás puntos de la figura?

3. La figura que se muestra a continuación es la misma que usamos en el ejemplo 2 de esta sección. Halle la traslación del $\overline{AB}$ sobre las rectas ℓ_1 y ℓ_2, pero esta vez, refleje primero con respecto a ℓ_2 y luego sobre ℓ_1. La traslación obtenida, ¿es la misma que la del ejemplo citado?



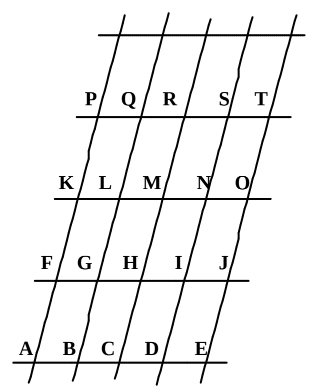
4. En la figura que se muestra a continuación, una traslación proyecta el punto A sobre el punto G. Determine la imagen de cada uno de los siguientes componentes:

   a. F

   b. $\overline{GL}$

   c. $\overline{CM}$

   d. $ABLK$ ▱



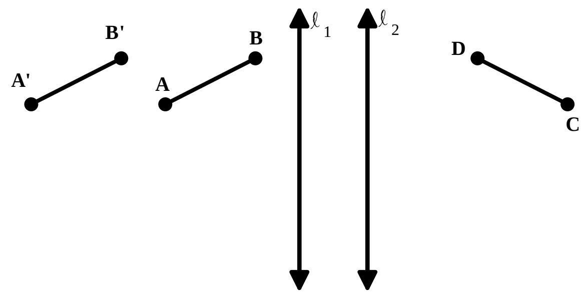
Verifique sus respuestas.

Contestaciones a los ejercicios.

1. 14 cm

2. Todos los puntos de la figura se trasladan 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia arriba.

3.



El $\overline{CD}$ es la reflexión del $\overline{AB}$ con respecto a ℓ_2 y el $\overline{A'B'}$ es la reflexión de $\overline{CD}$ con respecto a ℓ_1, por lo tanto, es la traslación de $\overline{AB}$.

Si comparamos esta traslación con la del ejemplo 2, vemos que la distancia de traslación es la misma pero en dirección opuesta.

4. a. L

   b. $\overline{MR}$

   c. $\overline{IS}$

   d. GHRQ▱

C. **Rotaciones**.

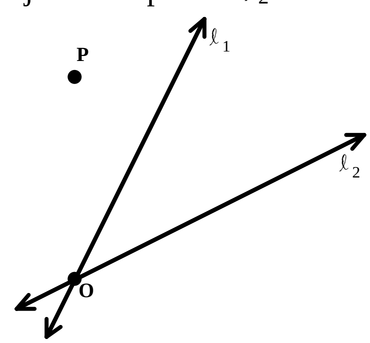
Definición:

Sea P un punto en un plano y ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas no paralelas, en ese mismo plano. Una **<u>rotación</u>** es la composición de dos reflexiones sobre dichas rectas, de la forma siguiente:

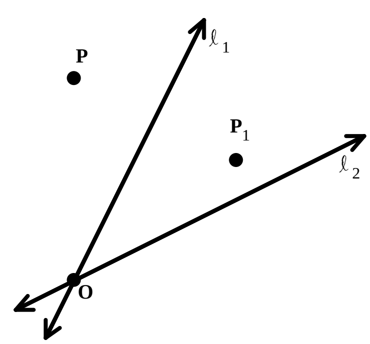
Primero se refleja el punto P sobre la recta ℓ_1 y luego la imagen de ésta se refleja con respecto a la recta ℓ_2. Al punto de intersección de las dos rectas se le conoce como el **centro de rotación**.

Ejemplos.

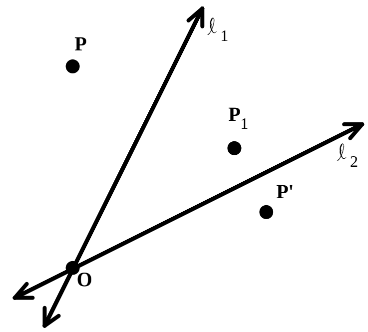
1. En la siguiente figura se muestra un punto P y dos rectas, ℓ_1 y ℓ_2, que se intersecan en el punto O. Halle la rotación del punto P sobre las dos rectas, reflejando primero el punto con respecto a ℓ_1 y la imagen de éste se refleja con respecto a ℓ_2.



Al reflejar el punto P sobre la recta ℓ_1 obtenemos el punto P_1.

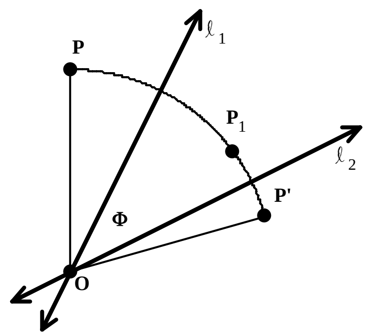


Ahora, reflejamos el punto P_1 con respecto a ℓ_2 y obtenemos el punto P'.



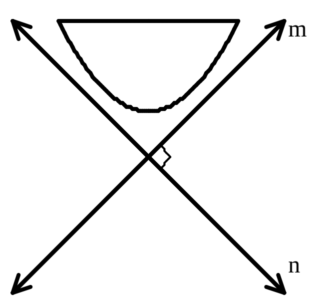
Si Φ representa el ángulo entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2. Es fácil demostrar, usando congruencia de triángulos, que:

1. $OP = OP_1 = OP'$
2. $m(\angle POP') = 2\,m\angle(\Phi)$

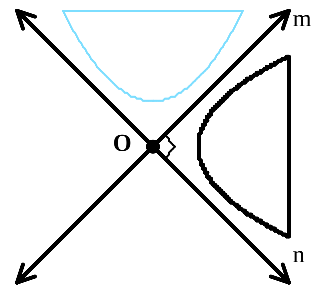


Lo anterior hace claro que una doble reflexión sobre dos rectas no paralelas, es una rotación. El centro de rotación es el punto de intersección de las dos rectas y el ángulo de rotación es 2Φ.

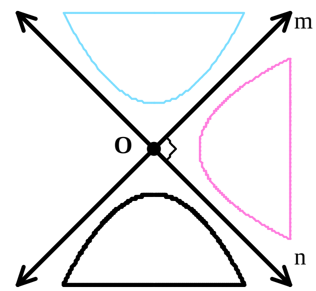
2. En la siguiente gráfica aparecen dos rectas perpendiculares entre sí, junto a una figura. Halle la rotación de la figura con respecto a las dos rectas, reflejando primero la figura con respecto a la recta m y luego con respecto a la recta n. Describa la rotación resultante.



Primero reflejamos la figura con respecto a la recta m y obtenemos la siguiente:

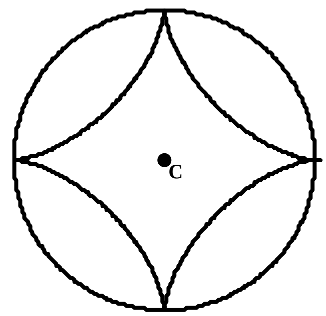


Si reflejamos esta última con respecto a la recta n obtenemos:

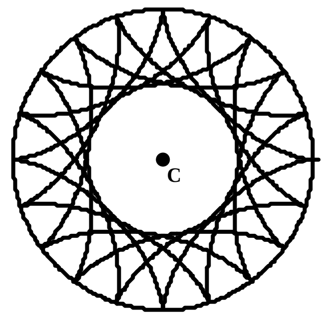


Como las rectas son perpendiculares, la rotación tiene un ángulo de 180°, esto es, se rota media vuelta, donde el punto O es el centro de rotación.

3. A continuación se muestra una figura, llamada asteroide, inscrita en un círculo con centro en C.

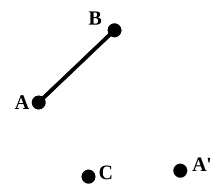


Si rotamos la figura 18^o en repetidas ocasiones con centro de rotación C, esto es, la rotamos 18^o y la imagen la volvemos a rotar 18^o y así sucesivamente, obtendremos la siguiente figura:

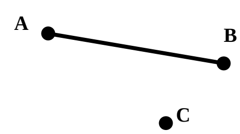


Ejercicios.

1. En el diagrama que aparece a continuación, rote el $\overline{AB}$ con respecto al punto C de manera que la imagen de A sea A′.



2. En el diagrama que aparece a continuación, rote el $\overline{AB}$ con respecto al punto C, 90^o a favor de las manecillas del reloj.



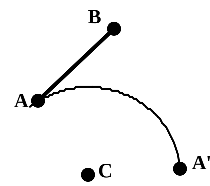
3. Si una figura se refleja respecto a dos rectas que se intersecan en un punto y luego la imagen se refleja con respecto a dos recta paralelas, ¿cuál es el resultado final?

Verifique sus respuestas.

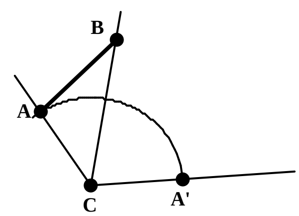
Contestaciones a los ejercicios.

1. Trace un arco con centro en C y que contenga a A. Este arco tiene que contener también a A′, si no es así, entonces no existe una rotación con las especificaciones pedidas.

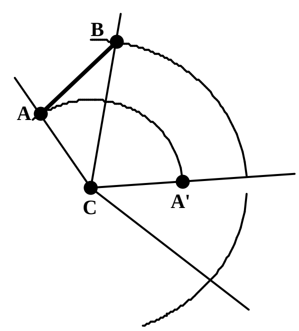
   En nuestro caso el arco contiene a A′.



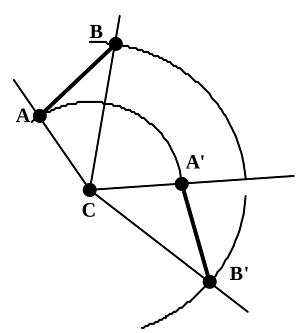
   Trace tres segmentos desde C, uno a través de A, otro a través B y el otro a través a A′.



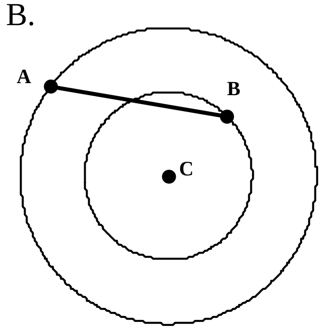
   Trace un arco con centro en C y que contenga a B. Como el $m(\angle ACA') = m(\angle BCB')$, mida el $\angle ACA'$ y construya el $\angle BCB'$ ya que B′ está en el último arco que se construyó.



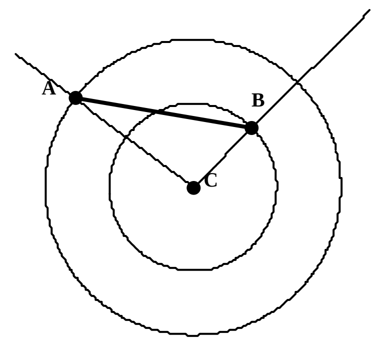
   Ahora marque B′ y trace el $\overline{A'B'}$.



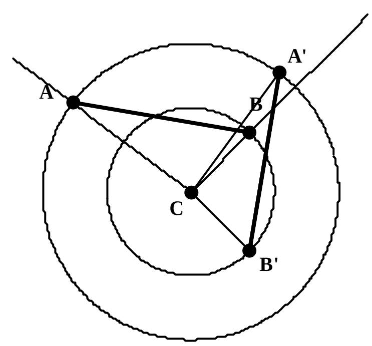
2. Trace dos círculos, ambos con centro en C, uno que contenga al punto A y el otro que contenga al punto B.



Trace dos segmentos a partir de C, uno que contenga a A y el otro que contenga a B.



Mida dos ángulos de 90°, a favor de las manecillas del reloj, uno a partir de $\overline{CA}$ y el otro a partir de $\overline{CB}$. La intersección de los lados terminales de estos ángulos con los círculos son los puntos A′ y B′, respectivamente.



3. Es equivalente a una rotación de la figura y luego una traslación.

D. Simetría

Definición:

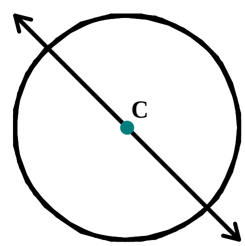
Una figura plana es **<u>simétrica con respecto a una recta</u>** ℓ si la reflexión de la figura con respecto a ℓ es la misma figura. A la recta ℓ se le conoce como el **eje de simetría**.

Una figura plana es **<u>simétrica con respecto a un punto P</u>** si al rotar la figura 180^o con centro de rotación en P, la figura que se obtiene es ella misma.

Ejemplos.

1. ¿Qué tipo de simetría exhibe un círculo?

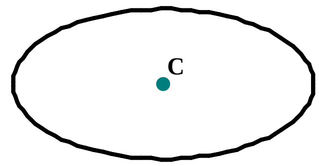
   Observe que si trazamos una recta que contenga al centro del círculo, la reflexión del círculo con respecto a esa recta es el mismo círculo. Además, si usted rota el círculo con centro de rotación igual al centro, la imagen es el mismo círculo, independientemente del ángulo de rotación.



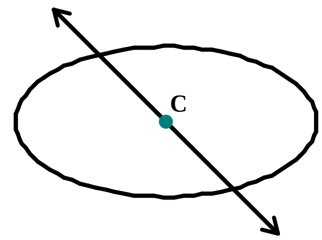
   Por lo tanto, un círculo es simétrico con respecto a cualquier recta que contenga su centro y también es simétrico con respecto a su centro.

2. ¿Es igual de simétrica una elipse que un círculo?

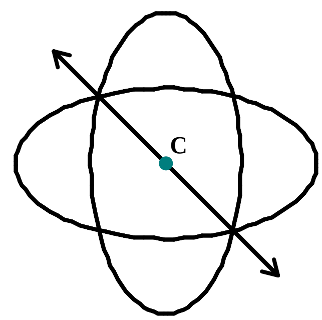
   Considere la siguiente elipse con centro en C.



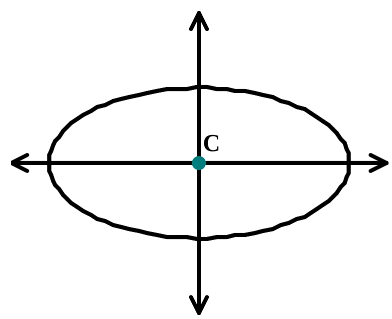
Trazamos ahora una recta que contiene a C, como la ilustrada a continuación.



La reflexión de la elipse con respecto a esta recta resulta en otra elipse distinta a la original, como se muestra a continuación. Por lo tanto, la elipse no es simétrica con respecto a esta recta.



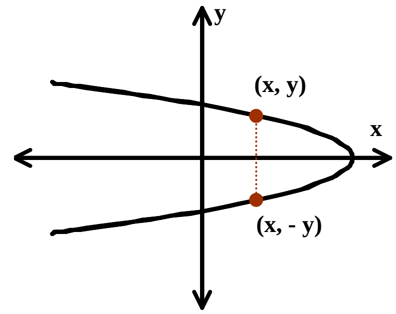
Mas sin embargo, la reflexión de la elipse con respecto a cualquiera de las dos rectas ilustrada a continuación, resulta en la misma elipse.



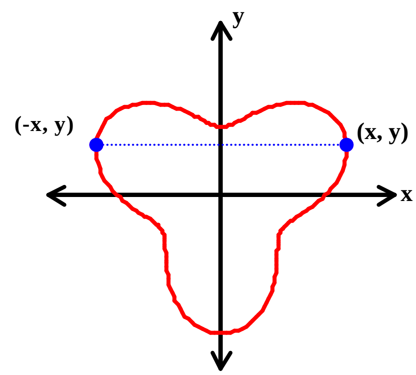
Por otro lado, si a la elipse le hacemos una rotación de 180^{o} con respecto al centro, también resulta en la elipse original.

Así, tenemos que la elipse tiene dos ejes de simetría y también es simétrica con respecto a su centro.

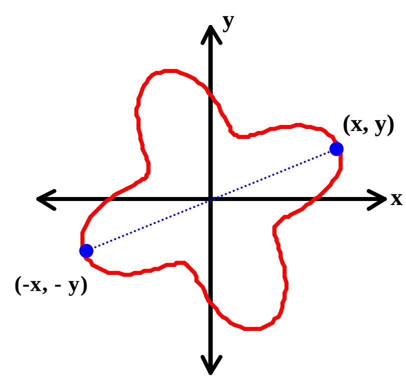
Si la gráfica de una ecuación en dos variables es simétrica con respecto al eje de x, como la ilustrada a continuación, y el punto (x, y) pertenece a la gráfica de ésta, entonces el punto $(x, -y)$ también pertenece a la gráfica de la ecuación.



Si la gráfica de una ecuación en dos variables es simétrica con respecto al eje de y, como la ilustrada a continuación, y el punto (x, y) pertenece a la gráfica de la ecuación, entonces el punto $(-x,\ y)$ también pertenece a la misma gráfica.



Por otro lado, si la gráfica de una ecuación en dos variables es simétrica con respecto al origen y el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces el punto $(-x, -y)$ también pertenece a la gráfica de la ecuación.



Resumiendo lo anterior tenemos:

La gráfica de una ecuación en dos variables es **simétrica** con respecto al…

1. **eje de x** si y sólo si, siempre que las coordenadas del punto (x, y) satisfacen la ecuación, entonces las coordenadas del punto $(x, -y)$ también satisfacen la ecuación.

2. **eje de y** si y sólo si, siempre que las coordenadas del punto (x, y) satisfacen la ecuación, entonces las coordenadas del punto $(-x, y)$ también satisfacen la ecuación.

3. **origen** si y sólo si, siempre que las coordenadas del punto (x, y) satisfacen la ecuación, entonces las coordenadas del punto $(-x, -y)$ también satisfacen la ecuación.

¿Cómo determinamos si la gráfica de una ecuación exhibe alguna de las simetrías discutidas anteriormente?

1. Para determinar simetría con respecto al **eje de x,** en la ecuación, reemplazamos a y por $-y$, $[-y \rightarrow y]$. Si al simplificar obtenemos la ecuación original, entonces hay simetría con respecto al eje de x, de lo contrario, no la hay.

2. Para determinar simetría con respecto al **eje de y,** en la ecuación, reemplazamos a x por $-x$, $[-x \rightarrow x]$. Si al simplificar obtenemos la ecuación original, entonces hay simetría con respecto al eje de y, de lo contrario, no la hay.

3. Para determinar simetría con respecto al **origen,** en la ecuación, reemplazamos a y por $-y$ & $x\ por -x$, $[-y \rightarrow y\ \&\ -x \rightarrow x]$. Si al simplificar obtenemos la ecuación original, entonces hay simetría con respecto al origen, de lo contrario, no la hay.

Ejemplos.

Determine si la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones tiene alguna de las simetrías discutidas anteriormente.

1. $yx^2 + y = 4$

$-y \to y$

$(-y)x^2 + (-y) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} -yx^2 - y = 4 \\ yx^2 + y = -4 \end{array}\right\}$$

Ninguna de estas dos ecuaciones es equivalente a $yx^2 + y = 4$.

Por lo tanto, la gráfica no es simétrica con respecto al eje de x.

$-x \to x$

$y(-x)^2 + y = 4$

$yx^2 + y = 4$

Por lo tanto, la gráfica sí es simétrica con respecto al eje de y.

$-y \to y \;\; \& \; -x \to x$

$(-y)(-x)^2 + (-y) = 4$

$-yx^2 - y = 4$

$yx^2 + y = -4$

Por lo tanto, no hay simetría con respecto al origen.

2. $yx^2 + y = x^3 - x$

$-y \to y$

$(-y)x^2 + (-y) = x^3 - x$

$$\left.\begin{array}{l} -yx^2 - y = x^3 - x \\ yx^2 + y = -x^3 + x \end{array}\right\}$$

Ninguna de las dos ecuaciones es equivalente a $yx^2 + y = x^3 - x$

Así concluimos que no hay simetría con respecto al eje de x.

$-x \to x$

$y(-x)^2 + y = (-x)^3 - (-x)$

$yx^2 + y = -x^3 + x$

Por lo tanto, la gráfica de $yx^2 + y = x^3 - x$ no es simétrica con respecto al eje de y.

$-y \to y$ & $-x \to x$

$(-y)(-x)^2 + (-y) = (-x)^3 - (-x)$

$-yx^2 - y = -x^3 + x$

$yx^2 + y = x^3 - x$

Como la ecuación obtenida es la misma que la original, tenemos así que la gráfica de $yx^2 + y = x^3 - x$ es simétrica con respecto al origen.

3. $4x^2 + y^2 = 4$

$-y \to y$

$4x^2 + (-y)^2 = 4$

$4x^2 + y^2 = 4$

$-x \to x$

$4(-x)^2 + y^2 = 4$

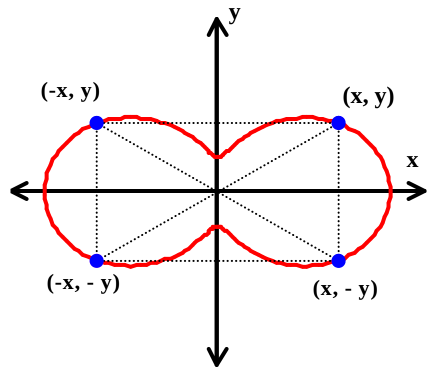
$4x^2 + y^2 = 4$

$-y \to y$ & $-x \to x$

$4x^2 + y^2 = 4$

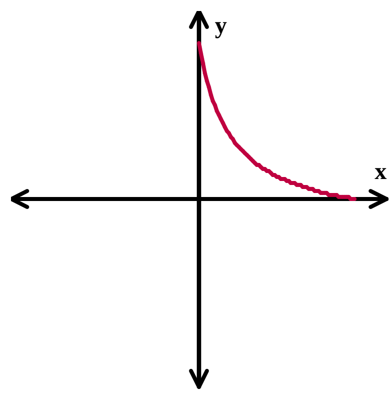
Como la ecuación obtenida en cada una de las tres sustituciones anteriores es idéntica a la ecuación original, concluimos entonces que la gráfica de $4x^2 + y^2 = 4$ es simétrica tanto con respecto al eje de x, al eje de y como al origen.

4. Suponga que tenemos una gráfica que exhibe dos de las simetrías discutidas anteriormente, ¿exhibirá la tercera simetría discutida?

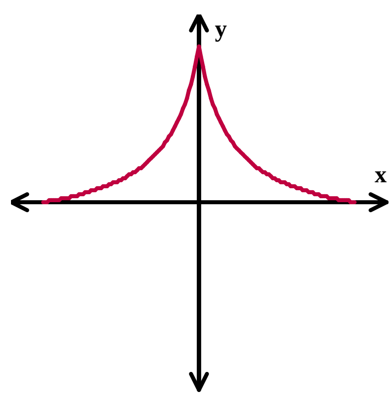


En el diagrama anterior se ilustra que si una gráfica tiene dos de las simetrías discutidas en esta sección, también exhibe la tercera simetría.

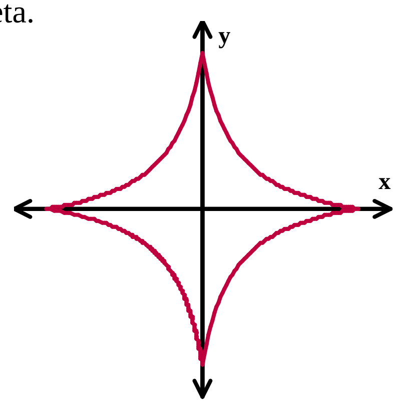
5. A continuación se muestra parte de la gráfica de una ecuación. Si la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto tanto al eje de x como al eje de y, termine de construir la gráfica.



Como es simétrica con respecto al eje de y, entonces la reflejamos con respecto a ese eje, y obtenemos otra parte de la gráfica.



Ahora bien, la gráfica también tiene simetría con respecto al eje de x, por lo tanto la reflejamos con respecto a ese eje, y obtenemos la gráfica completa.



Definicion:

Sea D un subconjunto de los números reales y f una función cuyo dominio es D.

La funcion f es **impar** si y sólo si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \epsilon D$.

La funcion f es **par** si y sólo si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \epsilon D$.

Nota: Si f es una función impar y (a, b) pertenece a la gráfica de f, entonces $b = f(a)$ y $f(-a) = -f(a) = -b$, por lo que concluimos que $(-a, -b)$ también pertenece a la gráfica de f.

Cuando afirmamos que una función es impar es equivalente a decir que su gráfica es simétrica con respecto al origen. Además, decir que una funcion es par es lo mismo que afirmar que su gráfica es simétrica con respecto al eje de y.

Ejemplos.

Determine si cada una de las funciones definidas a continuación es par, impar o niguna de ellas.

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 7 \\
&= 3x^4 - 5x^2 + 7 \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función es par.

2. $f(x) = 3x^5 + 8x^3 - 4x$

$$f(-x) = 3(-x)^5 + 8(-x)^3 - 4(-x)$$
$$= -3x^5 - 8x^3 + 4x$$
$$= -(3x^5 + 8x^3 - 4x)$$
$$= -f(x)$$

Tenemos entonces que la función es impar.

3. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 3$

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x)^2 - (-x) + 3$$
$$= -2x^3 + 5x^2 + x + 3$$

Por lo tanto, la función no es ni par ni impar.

Ejercicios.

1. Determine si la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones tiene alguna de las simetrías de las discutidas anteriormente.

   a. $y^3x^2 - 3y = 5$
   b. $x^3 - y^3 = xy$
   c. $yx = 4$
   d. $x^2 - 7y^2 = 1$
   e. $y^4 - 7y^2 = 1 + x$

2. Determine si las funciones dadas a continuación son pares, impares o ninguna de las dos.

   a. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$
   b. $f(x) = x^4 - x^2 + |x| + 3$
   c. $f(x) = x^5 + 3x^3 - 5x$

Verifique sus respuestas.

Contestaciones a los ejercicios.

1. a. Simétrica con respecto al eje de y.

   b. No hay simetría.

   c. Simétrica con respecto al origen.

   d. Simétrica con respecto al eje de y, al eje de x y al origen.

   e. Simétrica con respecto al eje de x.

2. a. Ninguna de las dos.

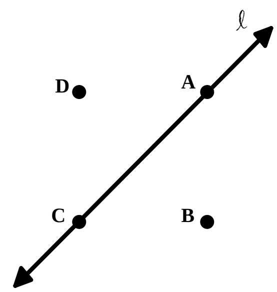
   b. par

   c. impar

Pos - prueba:

Escoja la contestación correcta.

Considere el siguiente diagrama para contestar los ejercicios 1 y 2.



1. En la figura anterior, si hacemos una reflexión sobre la recta dada, ¿cuál de los siguientes puntos es la imagen de A?

   a. A

   b. B

   c. C

   d. D

2. En la figura anterior, si hacemos una reflexión sobre la recta dada, ¿cuál de los siguientes puntos es la imagen de D?

   a. A

   b. B

   c. C

   d. D

3. Si un punto A se refleja sobre una recta y la distancia entre A y su imagen es de 10 cm, ¿a qué distancia está la recta del punto A?

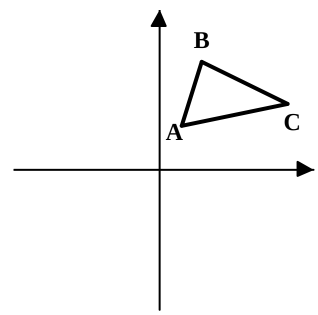
   a. 5 cm

   b. 10 cm

   c. 15 cm

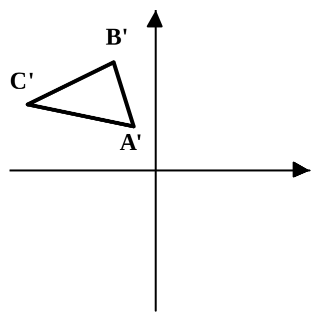
   d. 20 cm

Considere el siguiente diagrama para contestar los ejercicios 4 y 5.

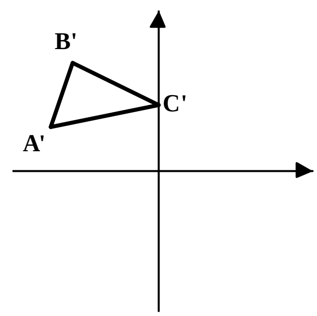


4. En la gráfica anterior, ¿cuál es la reflexión del ΔABC sobre el eje de x?

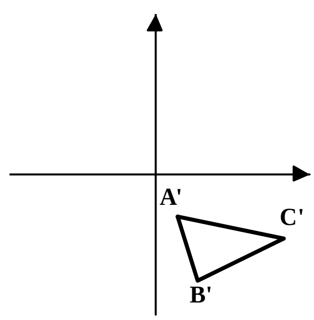
a.



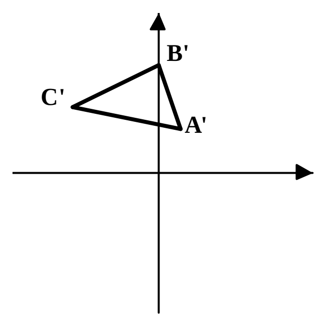
c.



b.

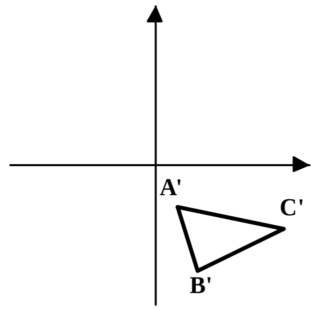


d.

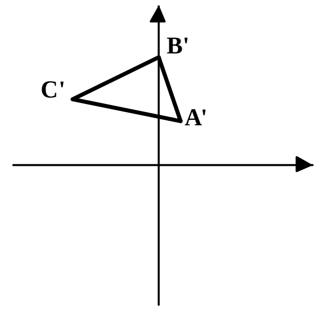


5. ¿Cuál de las siguientes es una traslación del ΔABC en la gráfica anterior?

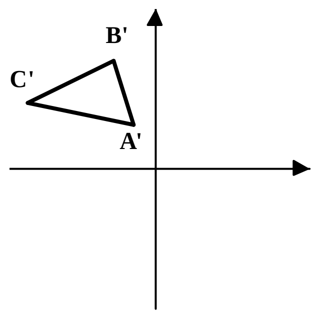
a.



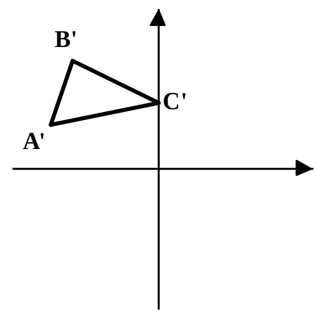
c.



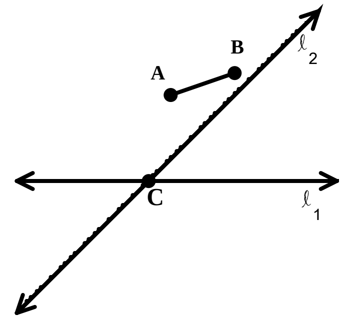
b.

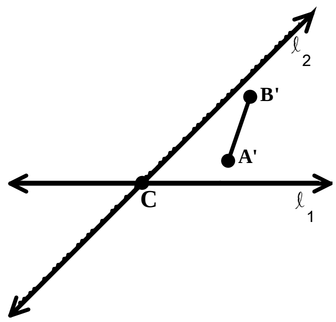


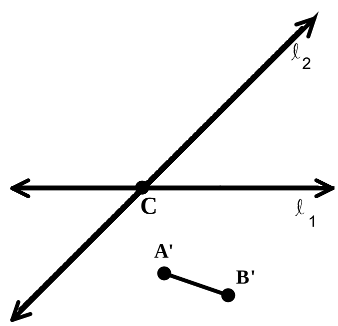
d.

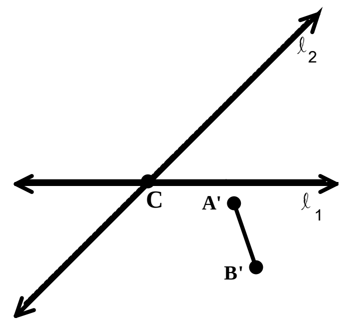


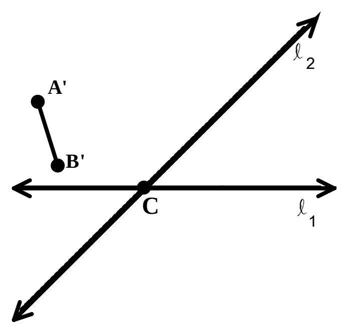
6. En la figura de la derecha se muestra el $\overline{AB}$ y dos rectas que se intersecan en el punto C. Si hacemos una rotación con respecto a las dos rectas, haciendo primero una reflexión con respecto a la recta ℓ_1 y esa reflexión la reflejamos con respecto a ℓ_2, ¿cuál de las siguientes es la imagen del $\overline{AB}$?



a.


b.


c.


d.


7. ¿Cuál de las siguientes transformaciones preserva la apariencia de todo tipo de figura?

a. reflexión

b. rotación

c. traslación

d. todas las anteriores

8. ¿Cuál de las siguientes transformaciones preserva la congruencia de un triángulo?

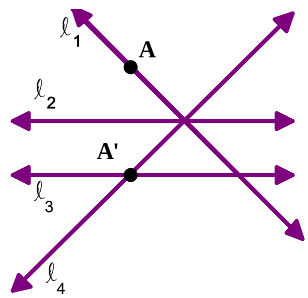
   a. reflexión

   b. traslación

   c. rotación

   d. todas de las anteriores

9. En la siguiente gráfica se muestran cuatro rectas, un punto A y su reflexión, A′, con respecto a una de las rectas ilustradas, ¿cuál es la recta de reflexión?



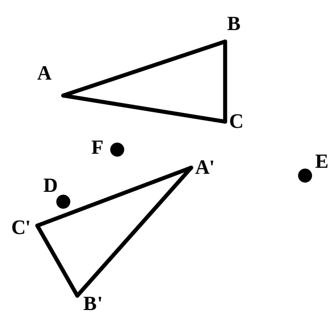
   a. ℓ_1

   b. ℓ_2

   c. ℓ_3

   d. ℓ_4

10. En la siguiente figura el ΔA'B'C' es una rotación del ΔABC. Entre los puntos ilustrados, ¿cuál es el punto de rotación?



   a. A

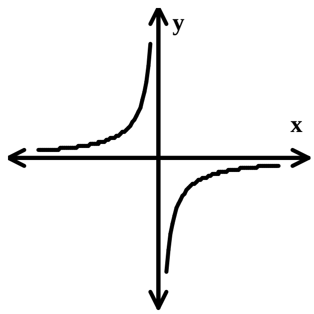
   b. D

   c. E

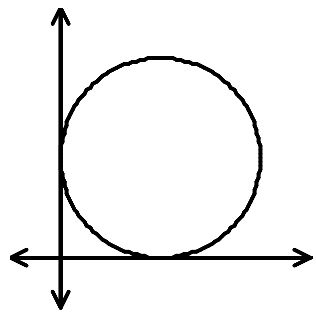
   d. F

11. ¿Cuál de las siguientes gráficas es simétrica con respecto al origen?

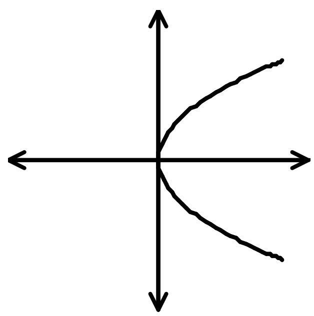
a.



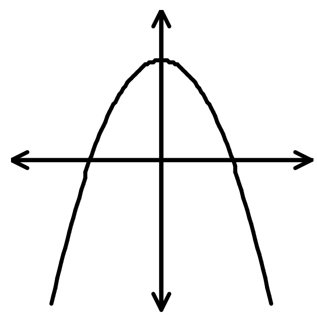
c.



b.



d.



12. La gráfica de la función definida por $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5$ es simétrica con respecto:

a. al eje de x

b. al eje de y

c. al origen

d. no exhibe ningún tipo de simetría

13. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene una gráfica simétrica con respecto al eje de x?

a. $xy = 1$
b. $x^3 + y^2 = 1$
c. $x^2 + y^2 = xy$
d. $x^6 + x^2 = 2y + 1$

Verifique sus respuestas.

Contestaciones de la pre-prueba

1. b
2. d
3. a
4. c
5. c
6. a
7. d
8. b
9. d
10. d
11. b
12. c
13. d

Contestaciones de la pos-prueba

1. a
2. b
3. a
4. b
5. d
6. d
7. c
8. d
9. b
10. d
11. a
12. b
13. b