

**Universidad de Puerto Rico en Bayamón  
Departamento de Matemáticas**

**MÓDULO 6:**

**PROBABILIDAD**  
(10 mo – 12 mo)

**Preparado por:  
Prof. Adalberto Agosto  
Catedrático Auxiliar, Departamento de Matemáticas  
Universidad de Puerto Rico en Bayamón  
junio 2010**

## PRE-PRUEBA

Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escoja la alternativa correcta.

1. La probabilidad que se basa en la frecuencia relativa de un evento se conoce como probabilidad
  - a. empírica
  - b. teórica
  - c. subjetiva
  - d. clásica
  
2. Tres monedas son lanzadas al azar. La probabilidad de que se obtengan exactamente dos caras es
  - a.  $\frac{1}{3}$
  - b.  $\frac{3}{8}$
  - c.  $\frac{1}{2}$
  - d.  $\frac{2}{3}$
  
3. Si  $P(A) = 0.3$  y  $P(B) = 0.4$  donde  $A$  y  $B$  son eventos mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de que  $A$  y  $B$  ocurran simultáneamente es:
  - a. 0
  - b. 0.12
  - c. 0.58
  - d. 0.7
  
4. Sea  $P(A) = 0.2$  y  $P(B) = 0.5$ , donde  $A$  y  $B$  son independientes, entonces  $P(A \text{ o } B) =$ 
  - a. 0
  - b. 0.1
  - c. 0.6
  - d. 0.7

Utilice la siguiente información para contestar las preguntas 5 - 7.

Un líder comunitario desea conocer la opinión de la gente de su comunidad sobre cierta medida legislativa que se discute en el Senado. La siguiente tabla ilustra los resultados de una encuesta realizada sobre una muestra representativa de 300 miembros de la comunidad.

	A favor	En contra	Neutral	Totales
Hombres	45	15	10	70
Mujeres	90	110	30	230
Totales	135	125	40	300

Si seleccionamos, al azar, a un individuo de la muestra:

5. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada sea hombre y que esté a favor de la medida legislativa?
  - a. 0.3333
  - b. 0.6429
  - c. 0.3200
  - d. 0.1500
  
6. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada **no** sea neutral, sabiendo que es mujer?
  - a. 0.8696
  - b. 0.7692
  - c. 0.6667
  - d. 0.3000
  
7. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada esté a favor de la medida legislativa o sea un hombre?
  - a. 0.6833
  - b. 0.5333
  - c. 0.6429
  - d. 0.6585

8. Un envase contiene 3 canicas rojas, 5 azules y 2 blancas. Dos canicas son extraídas al azar y sin reemplazo del envase. La probabilidad de que la segunda canica no sea roja dado que la primera no fue roja es:
- a.  $\frac{7}{9}$
  - b.  $\frac{7}{10}$
  - c.  $\frac{6}{9}$
  - d.  $\frac{6}{10}$
9. El número total de distintas formas en que se pueden repartir tres diferentes premios a tres diferentes personas entre cinco participantes es:
- a. 15
  - b. 20
  - c. 60
  - d. 125
10. Un candado de combinaciones abre con una secuencia de tres dígitos distintos. Si seleccionamos una secuencia de tres dígitos distintos al azar, la probabilidad de abrir el candado con esta secuencia es:
- a.  $\frac{1}{1000}$
  - b.  $\frac{3}{10}$
  - c.  $\frac{1}{120}$
  - d.  $\frac{1}{720}$

## OBJETIVOS

Luego de finalizar el estudio de este módulo estarás capacitado para

1. distinguir entre probabilidad empírica, teórica y subjetiva.
2. determinar el espacio muestral generado en un experimento.
3. determinar si un evento dado de un espacio muestral es simple o no.
4. determinar la probabilidad asociada a un evento simple.
5. determinar la probabilidad asociada al complemento de un evento.
6. definir y distinguir eventos compuestos.
7. determinar la probabilidad asociada a un evento compuesto.
8. definir eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes.
9. distinguir entre eventos dependientes e independientes.
10. calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes.
11. calcular la probabilidad condicional de un evento.
12. utilizar las reglas de la suma y la multiplicación para hallar probabilidades.
13. resolver problemas de conteo utilizando la regla fundamental de conteo, permutaciones y combinaciones.
14. calcular probabilidades que involucren permutaciones y combinaciones .

## JUSTIFICACIÓN

La probabilidad mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles. La teoría de la probabilidad tiene sus comienzos con los juegos de azar, pero hoy en día se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, la ciencia y la filosofía para llegar a conclusiones sobre la probabilidad de sucesos potenciales.

Este módulo ha sido diseñado con el propósito de desarrollar en usted los conocimientos básicos acerca de conceptos de probabilidad, así como las destrezas relacionadas al uso de sus reglas y técnicas de conteo para calcular la probabilidad de que ocurran eventos.

# INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Un experimento es una situación que da lugar a uno o varios resultados identificables. La probabilidad pertenece a la rama de la matemática que estudia ciertos **experimentos** llamados **aleatorios**, o sea, regidos por el azar, en que se conocen todos los resultados posibles, pero no se tiene la certeza de cuál será en particular el resultado del experimento. Por ejemplo, experimentos aleatorios cotidianos son el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado y la extracción de una carta de un paquete de cartas. De aquí en adelante, cada vez que decimos experimento nos referimos a un experimento aleatorio.

## CONCEPTOS BÁSICOS

A continuación les presentamos algunas definiciones de conceptos básicos de la teoría de la probabilidad.

**Evento** - Llamamos evento a cualquier conjunto de uno o más resultados u observaciones de un experimento.

**Ejemplo 1:** Obtener un 5 al realizar el experimento de lanzar al azar un dado de seis caras balanceado (todas las caras del dado son igualmente probables).



De aquí en adelante, de no especificar otro tipo de dado nos referimos a un dado balanceado.

Para el siguiente ejemplo entendamos que tradicionalmente decimos cara cuando obtenemos el lado de la moneda americana que contiene la imagen de un presidente y al otro lado lo llamamos cruz.

**Ejemplo 2:** Obtener una cara y una cruz en el experimento de lanzar dos monedas americanas, ambas al azar.

Notemos que se obtiene el 5 en el dado de una sola forma, pero una cara y una cruz en dos monedas hay dos formas distintas de obtenerse (cara-cruz y cruz-cara). O sea, que en el ejemplo 1 el evento consta de una sola observación posible y en el ejemplo 2 el evento consta de dos observaciones posibles.

**Evento Simple** - Llamamos evento simple a cualquier evento que consta de un solo resultado u observación de un experimento.

**Ejemplo 3:** Obtener un 3 al lanzar un dado al azar es un evento simple pues ocurre de una sola forma.

**Ejemplo 4:** Obtener un número impar al lanzar un dado al azar no es un evento simple pues ocurre de más de una forma, pues puede ser 1, 3 ó 5.

**Espacio Muestral** - El espacio muestral de un experimento es el conjunto que contiene solamente a todos los eventos simples posibles. De aquí en adelante utilizaremos la letra  $S$  para referirnos al espacio muestral.

**Ejemplo 5:** Halle el espacio muestral de lanzar al azar un dado.

**Respuesta:**  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**Ejemplo 6:** Halle el espacio muestral de lanzar al azar dos monedas americanas.

**Respuesta:**  $S = \{(cara-cara), (cara-cruz), (cruz-cara), (cruz-cruz)\}$



## Ejercicios 1:

1. Lanzamos un dado y luego una moneda americana, ambos al azar.
  - a. Halle el espacio muestral.
  - b. Determine si cada uno de los siguientes eventos es simple o no.
    - i. obtener 5 en el dado y cruz en la moneda
    - ii. obtener 3 en el dado
    - iii. obtener cara en la moneda
  
2. Una pareja planifica tener tres hijos. Considerando sólo el género de éstos:
  - a. halle el espacio muestral.
  - b. determine si cada uno de los siguientes eventos es simple o no.
    - i. obtener un solo varón
    - ii. obtener 3 niñas
    - iii. obtener un varón como primogénito
    - iv. obtener todos sus hijos de igual género

## NOTACIÓN DE PROBABILIDAD

Antes de seguir profundizando en el campo de la teoría de la probabilidad es importante presentarles algunas notaciones básicas de la misma. Utilizaremos la letra  $P$  para denotar una probabilidad. Es común utilizar letras mayúsculas como  $A$ ,  $B$  y  $C$  para denotar eventos específicos de un experimento. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra el evento  $A$  lo denotamos como  $P(A)$ .

## DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

La probabilidad de que ocurra un evento se mide por un número entre cero y uno, inclusive. Si un evento nunca ocurre, su probabilidad asociada es cero, mientras que si ocurriese siempre su probabilidad sería igual a uno. Así, las probabilidades suelen venir expresadas como decimales, fracciones o porcentajes. En el caso de utilizar fracciones para expresar probabilidades, las mismas pueden ser simplificadas pero no es necesario hacerlo.

Existen diferentes formas para definir la probabilidad de un evento basadas en formas distintas de calcular o estimar la probabilidad. A continuación discutiremos tres diferentes enfoques. Seleccionar uno de los tres enfoques dependerá de la naturaleza del problema.

### 1. Definición Clásica de Laplace, "A Priori" o Teórica

El enfoque clásico o "*a priori*" para definir la probabilidad es proveniente de los juegos de azar. Esta definición es de uso limitado puesto que descansa sobre la base de las siguientes dos condiciones:

- i. El espacio muestral ( $S$ ) del experimento es **finito** (su número total de elementos es un número natural  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).
- ii. Los resultados del espacio muestral deben ser **igualmente probables** (tienen la misma posibilidad de ocurrir).

Bajo estas condiciones, suponga que realizamos un experimento. El número total de elementos del espacio muestral del experimento es denotado como  $n(S)$ . Dicho de otro modo,  $n(S)$  representa el número total de eventos simples distintos posibles al realizar un experimento. Además, si  $A$  es un evento de este experimento, el número total de elementos del espacio muestral contenidos en  $A$  es denotado como  $n(A)$ . Es decir,  $n(A)$  representa el número total de formas distintas en que  $A$  puede ocurrir. Entonces, la probabilidad de que  $A$  ocurra la definimos como

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{número de formas distintas en que } A \text{ puede ocurrir}}{\text{número total de eventos simples distintos posibles}} .$$

A partir de esta definición las probabilidades de los posibles resultados del experimento se pueden determinar a priori, es decir, sin realizar el experimento.

**Ejemplo 7:** Al lanzar un dado al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?

**Solución:** Suponga que  $A$  es el evento de obtener un número par al lanzar un dado al azar. Notemos que  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y todos los resultados igualmente probables. Además,  $A$  puede ocurrir de tres formas distintas (2, 4 ó 6). Por lo tanto,  $n(A) = 3$  y  $n(S) = 6$  entonces

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} .$$

**Ejemplo 8:** Si se extrae una carta de un paquete de 52 cartas de las cuales 26 son negras (13 espadas A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K); 13 son tréboles); y 26 son rojas (13 corazones y 13 diamantes), halle la probabilidad de que la carta sea

- una K.
- roja.
- de diamante.

**Solución:**

a. Suponga que  $K$  es el evento de obtener una carta que sea  $K$ , entonces  $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$  porque el evento de "extraer una  $K$ " consta de 4 de los 52 resultados igualmente probables.

b. Suponga que  $R$  es el evento de obtener una carta que sea roja, entonces  $P(R) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$  porque el evento de "extraer una carta roja" consta de 26 de los 52 resultados igualmente probables.

c. Suponga que  $D$  es el evento de obtener una carta que sea de diamante, entonces  $P(D) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$  porque el evento de "extraer una carta de diamante" consta de 13 de los 52 resultados igualmente probables.

**Ejemplo 9:** ¿Cuál es la probabilidad de que en una familia que tiene tres hijos, haya dos niñas y un niño, si se considera igualmente probable el nacimiento de un niño o niña?

**Solución:** Usando "a" para niña y "o" para niño, el espacio muestra es:  $S = \{aaa, aao, aoa, aoo, oaa, oao, ooa, ooo\}$  por lo que  $n(S) = 8$ . Definimos el evento  $A$  como que haya dos niñas y un niño, entonces  $A = \{aao, aoa, oaa\}$  y

$$n(A) = 3. \text{ Por lo tanto, } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

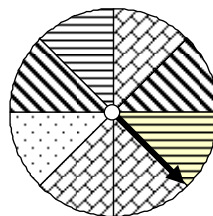
$$P(A) = \frac{3}{8}$$

$$P(A) = 0.375 \quad \text{o} \quad P(A) = 37.5\%$$

Bajo las mismas premisas de este ejemplo, podemos concluir que el 37.5% de las familias que tienen tres hijos, de éstos dos son niñas y uno es niño.

## Ejercicios 2: Conteste

1. Si usted es una de 7 personas de las cuales seleccionarán una al azar y todas las personas tienen igual probabilidad de ser seleccionada, ¿cuál es la probabilidad de que usted sea seleccionada?
2. En un envase hay 2 canicas rojas, 4 negras y 5 blancas. Si seleccionamos al azar una de estas canicas, ¿cuál es la probabilidad de que la canica sea negra?
3. La siguiente ruleta circular está dividida en 8 sectores iguales. Si se gira la ruleta aleatoriamente, (Suponga que la aguja no cae en las divisiones.)



- a. ¿cuál es la probabilidad de que la aguja caiga en un sector marcado con líneas horizontales?
  - b. ¿cuál evento predecirías?
4. Dos dados son lanzados al azar, uno rojo y uno blanco.
    - a. Halle la probabilidad de que la suma sea 6.
    - b. ¿Cuál debería ser su predicción para la suma de ambos dados?
  5. En un grupo de 25 personas hay 16 de ellas casadas y 9 solteras. Si seleccionamos una de estas personas al azar, ¿cuál evento es más probable, soltera o casada?

## 2. Definición Empírica, “A Posteriori”, Experimental o de Frecuencia Relativa

La definición clásica se ve limitada a situaciones en las que hay un número finito de resultados igualmente probables. Lamentablemente, hay situaciones prácticas que no son de este tipo y la definición “a priori” no se puede aplicar. Por ejemplo, si se pregunta por la probabilidad de que un paciente se cure mediante cierto tratamiento médico, o la probabilidad de que una determinada máquina produzca artículos defectuosos, entonces no hay forma de introducir resultados igualmente probables. Para responder a estas preguntas podemos utilizar el enfoque empírico, en el cual para determinar los valores de probabilidad se requiere de la observación y de la recopilación de datos. La definición empírica se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de repeticiones del experimento. En otras palabras, la definición empírica se basa en el número de veces que ocurrió el evento entre el número total de repeticiones del experimento. También se le denomina a posteriori, ya que el resultado se obtiene después de realizar el experimento un cierto número grande de veces.

Si queremos conocer la probabilidad del evento  $A$  según este enfoque realizamos el experimento un gran número de veces y contamos cuántas veces  $A$  ocurre. Con base en estos resultados reales,  $P(A)$  se estima de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{\text{número de veces que ocurrió } A}{\text{número de veces que se repitió el experimento}}$$

Este enfoque de probabilidad no implica ningún supuesto previo de igualdad de probabilidades.

Moneda Obtenida	Frecuencia
-----------------	------------

**Ejemplo 10:** Queremos seleccionar una moneda al azar de un envase que contiene una cantidad desconocida de monedas de 25¢, 10¢, 5¢ y 1¢. Para determinar la probabilidad de cada evento

25¢	15
10¢	12
5¢	18
1¢	5

posible, seleccionamos 50 monedas al azar con reemplazo (la moneda seleccionada vuelve a echarse en el envase para la próxima selección) de este envase. La siguiente tabla resume las frecuencias (veces que ocurren) de cada moneda.

Según los datos recopilados, si seleccionamos una moneda de este envase,

- a. ¿cuál es la probabilidad de que sea de 25¢ ?
- b. ¿cuál es el evento menos probable?
- c. ¿cuál es el evento que debemos predecir?

**Respuesta:** Notemos que al no conocer el número de monedas de cada clase que hay en el envase, no podemos utilizar la probabilidad clásica para hallar la probabilidad de cada evento posible. Pero, utilizando los resultados anteriores resumidos en la tabla podemos concluir que:

- a. Si  $A$  es el evento de obtener una moneda de 25¢, entonces

$$P(A) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} .$$

- b. El evento menos probable es el de menor frecuencia, es decir, obtener una moneda de 1¢.
- c. El evento que debemos predecir es el más probable, por lo tanto, es el evento de mayor frecuencia, es decir, obtener una moneda de 5¢.

**Ejemplo 11:** Se conoce que una moneda está cargada. Esto significa que un lado de la moneda se obtiene con mayor frecuencia que el otro lado al lanzarla al azar un número grande de veces. Para determinar la probabilidad de que caiga cara, la moneda se lanza 60 veces al aire, de las cuales 24 veces cayó cara. Si aplicamos la fórmula obtenemos:

$$P(\text{cara}) = \frac{24}{60}$$

$$P(\text{cara}) = 0.4$$

$$P(\text{cara}) = 40\%$$

Al calcular probabilidades con este método de frecuencias relativas obtenemos una aproximación en vez de un valor exacto. A mayor número de veces que repetamos el experimento, más cerca estará la aproximación del valor real. Esta propiedad se enuncia en forma de teorema, el cual se conoce comúnmente como la **ley de los números grandes**.

### ***Ley de los Números Grandes***

Conforme un experimento se repite una y otra vez, la probabilidad de frecuencias relativas de un evento tiende a aproximarse a la probabilidad real.

Cuando se usa la definición empírica, es importante tomar en cuenta los siguientes aspectos:

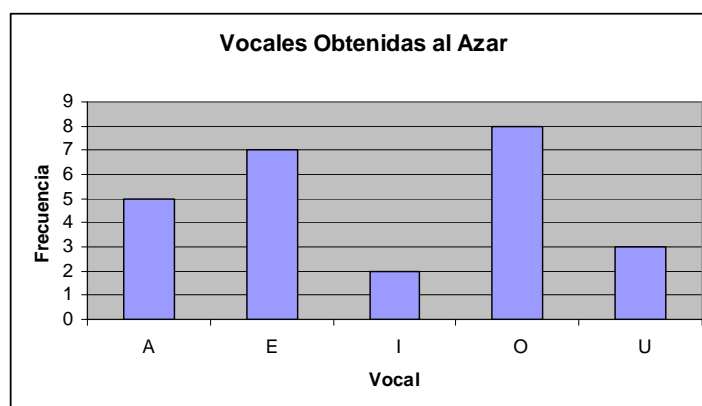
- i. La probabilidad obtenida de esta manera es únicamente una estimación del valor real.
- ii. Cuanto mayor sea el número de repeticiones del experimento, tanto mejor será la estimación de la probabilidad.



- iii. La probabilidad es propia de sólo un conjunto de condiciones idénticas a aquéllas en las que se obtuvieron los datos, o sea, la validez de emplear esta definición depende de que las condiciones en que se realizó el experimento sean repetidas idénticamente.

### Ejercicios 3:

1. Una tómbola contiene un número desconocido de cartas marcadas con una vocal cada una. Con el propósito de estimar la probabilidad de obtener cada resultado, se extrajo una carta al azar y con reemplazo de esta tómbola varias veces. La siguiente gráfica de barras presenta los resultados. A base de estos resultados,



- a. ¿cuál es el evento de menor probabilidad?
- b. ¿cuál es la probabilidad de obtener una E al extraer una carta de esta tómbola?
- c. ¿cuál evento predecirías?
2. Realice el experimento de lanzar una tachuela al azar 30 veces. Utilice probabilidad empírica para determinar la probabilidad de que la tachuela caiga con la punta hacia arriba al lanzarla al azar.



### 3. Definición Subjetiva

Esta definición de probabilidad se diferencia de los dos enfoques anteriores, debido a que tanto el enfoque clásico como el de frecuencia relativa producen valores objetivos de probabilidad. El enfoque subjetivo define la probabilidad de un evento a base del grado de confianza que una persona tiene de que el evento ocurra, teniendo en cuenta toda la evidencia que tiene disponible, fundamentado en la intuición, opiniones, creencias personales y otra información indirecta relevante. Debido a que el valor de la probabilidad es un juicio personal, al enfoque subjetivo se le denomina también como enfoque personalista.

El enfoque subjetivo no depende de la repetitividad de ningún evento y permite calcular la probabilidad de sucesos únicos. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que un edificio colapse ante un terremoto? Este evento puede que ocurra o que nunca ocurra, pero es lógico pensar que no podemos repetir los terremotos un número grande de veces y contar el número de veces que el edificio colapsa para calcular esa probabilidad. Sin embargo, un especialista en el área puede asignar una probabilidad basada en su juicio de toda la información relevante a la que pueda tener acceso.

**Ejemplo 12:** Un analista deportivo afirma que Estados Unidos tiene una probabilidad de 90% de ganar la medalla de oro en baloncesto en las próximas olimpiadas. Notemos que esta probabilidad está basada en la confianza que el analista tiene de que el evento ocurra, con base en toda la evidencia que tiene disponible.

**Ejemplo 13:** Un paciente le pregunta a su cardiólogo sobre cuánta probabilidad tiene de salir exitosa la operación de corazón abierto que le dijo que tenía que realizarle. Basado en el conocimiento de su condición y la experiencia obtenida al trabajar casos similares, el médico le contestó que tenía un 85% de probabilidad de que la operación sea un éxito.

**Ejercicios 4:** Escoge la respuesta correcta:

1. La probabilidad de que terminen las negociaciones en un conflicto laboral en los próximos dos días es baja. Esto es un ejemplo de probabilidad

- a. clásica
- b. empírica
- c. subjetiva

2. En una compañía que produce tornillos se toman 1,000 de ellos para probar su calidad. Se encontró que 7 estaban defectuosos. Por lo tanto, la probabilidad de comprar uno de los tornillos que esta compañía produce y que el mismo esté

defectuoso es  $\frac{7}{1,000}$ . Esto es un ejemplo de probabilidad

- a. clásica
- b. empírica
- c. subjetiva

3. Hay seis participantes en una competencia de canto. A cada uno de ellos se le asigna un número diferente del 1 al 6. Se lanza un dado y el número que se obtenga decide el primer participante para cantar. La probabilidad de que el

participante número 4 sea el primero en cantar es  $\frac{1}{6}$ . Esto es un ejemplo de

probabilidad

- a. clásica
- b. empírica
- c. subjetiva

4. A una profesora universitaria le pregunta uno de sus estudiantes la probabilidad de que él apruebe su curso. La profesora le contestó que un 50%.

Esto es un ejemplo de probabilidad

- a. clásica
- b. empírica
- c. subjetiva

De aquí en adelante nos vamos a concentrar en la probabilidad clásica por lo que vamos a presumir, aunque no esté explícito, que el espacio muestral es finito y todos los eventos simples del espacio muestral son igualmente probables.

## REGLAS DE PROBABILIDAD

Dado cualquier evento imaginable, puede ocurrir una de tres cosas:

1. es imposible que ocurra.
2. es seguro que ocurre.
3. la certeza de que ocurra está en un punto intermedio.

Por lo tanto, podemos deducir lo siguiente:

1. La probabilidad de un evento imposible es 0.
2. La probabilidad de un evento que ocurrirá de seguro es 1.
3. Para cualquier evento  $A$ , la probabilidad de que  $A$  ocurra se encuentra entre 0 y 1, inclusive. Es decir,  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

**Ejemplo 14:** Al lanzar un dado al azar, la probabilidad de obtener un 7 es 0. Notemos que es imposible que ocurra este evento pues los resultados posibles son 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

**Ejemplo 15:** Al lanzar un dado al azar, la probabilidad de obtener un número menor que 7 es 1. Notemos que este evento ocurrirá de seguro pues todos los números posibles son menores de 7.

Considerando todo lo discutido anteriormente, podemos deducir que la probabilidad de un evento vacío es 0, ya que no tiene posibilidad de que ocurra. Al evento vacío lo denotamos como  $\phi$  o  $\{ \}$  (igual a la notación utilizada para el conjunto nulo o vacío). Además, la probabilidad del espacio muestral  $S$  es 1, ya que tiene todas las posibilidades de ocurrir. Es decir que,

$$P(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad P(S) = 1 .$$

## EVENTOS COMPUESTOS

Los **eventos compuestos** se forman combinando dos o más eventos simples. A continuación discutiremos tres operaciones básicas con conjuntos que generan eventos compuestos.

### Definición:

Sean  $A$  y  $B$  dos eventos de un mismo espacio muestral  $S$ , entonces:

1. La **unión** de  $A$  y  $B$ , denotada por  $A \cup B$ , es el evento que reúne todos los elementos de  $A$  con los elementos de  $B$  (evitando la duplicidad de elementos). Es decir,

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Dicho de otro modo,  $A \cup B$  es el conjunto de todos los elementos que están en  $A$ , están en  $B$  o están en ambos conjuntos. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra  $A$ , de que ocurra  $B$  o de que ocurran ambos simultáneamente es denotada por  $P(A \cup B)$  o  $P(A \text{ o } B)$ .

**Ejemplo 16:** En un grupo de 10 estudiantes universitarios hay 3 que toman un curso de inglés, 4 que toman un curso de matemáticas y 2 que toman ambos cursos. Halle la probabilidad de que al seleccionar uno de estos estudiantes al azar, el mismo tome el curso de inglés o el curso de matemáticas.

**Solución:** De los 10 estudiantes hay 2 que toman ambos cursos. Por lo tanto, cuando nos dicen que 3 estudiantes toman el curso de inglés son éstos 2 y otro más. Además, cuando nos dicen que 4 estudiantes toman un curso de matemáticas son éstos 2 y otros 2 más. Por lo tanto, el número total de estudiantes que toman el curso de inglés o el curso de matemáticas son los 2 que toman ambos cursos, el otro que toma inglés y los otros 2 que toman matemáticas. Por lo tanto,

$$P(\text{inglés o matemáticas}) = \frac{5}{10} = 0.5.$$

2. La **intersección** de  $A$  y  $B$ , denotada por  $A \cap B$ , es el evento que reúne todos los elementos comunes que pertenecen a ambos conjuntos. Es decir,

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Dicho de otro modo,  $A \cap B$  son todos los elementos que están en  $A$  y también están en  $B$ . Por lo tanto, la probabilidad de que ocurran  $A$  y  $B$  simultáneamente es denotada por  $P(A \cap B)$  o  $P(A \text{ y } B)$ .

**Ejemplo 17:** Del ejemplo anterior, halle la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea uno que tome el curso de inglés y el curso de matemáticas.

**Solución:** De los 10 estudiantes hay 2 que toman ambos cursos. Por lo tanto,  $P(\text{inglés y matemáticas}) = \frac{2}{10} = 0.2$ .

3. El **complemento** de  $A$ , denotado por  $\overline{A}$  (o por  $A^c$ ), es el evento que reúne todos los elementos de  $S$  que no están en  $A$ . Es decir,  $\overline{A}$  ocurre cuando  $A$  no ocurre y viceversa. Utilizando la notación de conjuntos, definimos  $\overline{A} = \{x | x \in S \text{ y } x \notin A\}$ . Por lo tanto, la probabilidad de que no ocurra  $A$  es la misma que la probabilidad de que ocurra su complemento y es denotada por  $P(\overline{A})$ .

**Ejemplo 18:** Un grupo de 30 personas se dividen en 8 hombres, 12 mujeres, 7 niños y 3 niñas. Halle la probabilidad de que al seleccionar una de estas personas al azar, ésta no sea niño.

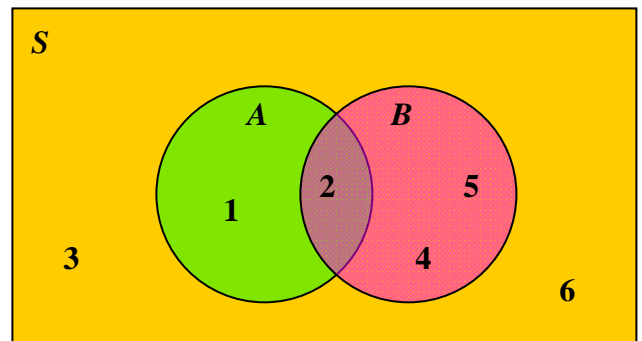
**Solución:** De las 30 personas, 7 son niños y por lo tanto, 23 no son niños. Entonces,  $P(\overline{\text{niño}}) = \frac{23}{30}$ .

## DIAGRAMAS DE VENN

Una de las gráficas más utilizadas para representar eventos compuestos y que facilita la interpretación y el cálculo de probabilidades es el diagrama de Venn. Los diagramas de Venn son gráficas pictóricas en las que comúnmente se utiliza un rectángulo para representar al espacio muestral ( $S$ ) y círculos dentro del rectángulo para representar los eventos. En ocasiones, los elementos de cada evento se insertan dentro del evento a que pertenecen y en otras ocasiones lo que se inserta dentro del evento es su probabilidad.

**Ejemplo 19:** Considere el siguiente diagrama de Venn y determine los eventos compuestos indicados.

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $\overline{A}$
- $\overline{B}$



**Respuesta:** Notemos que  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , entonces

- $A \cup B$  es el conjunto de todos los elementos que están en  $A$ , están en  $B$  o están en ambos conjuntos. Por lo tanto, del diagrama podemos observar que  $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$ .
- $A \cap B$  es el conjunto de todos los elementos que están en  $A$  y también están en  $B$ . Por lo tanto,  $A \cap B = \{2\}$ .
- $\overline{A}$  es el conjunto de todos los elementos que no están en  $A$ .  
Por lo tanto,  $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ .
- $\overline{B}$  es el conjunto de todos los elementos que no están en  $B$ .  
Por lo tanto,  $\overline{B} = \{1, 3, 6\}$ .

**Ejemplo 20:** Sea  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{2, 3, 5, 7\}$  y  $B = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ .

Halle las siguientes probabilidades:

a.  $P(A \cup B)$

b.  $P(A \cap B)$

c.  $P(\overline{A})$

d.  $P(\overline{B})$

e.  $P(\overline{A \cup B})$

f.  $P(\overline{A \cap B})$

**Respuesta:** Utilicemos el siguiente diagrama de Venn.

a.  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ,

por lo tanto,  $P(A \cup B) = \frac{6}{8} = 0.75$

b.  $A \cap B = \{2, 5, 7\}$ ,

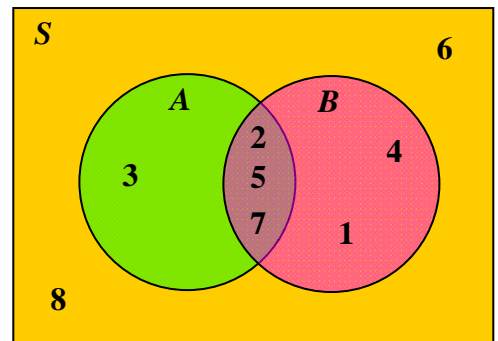
por lo tanto,  $P(A \cap B) = \frac{3}{8} = 0.375$

c.  $\overline{A} = \{1, 4, 6, 8\}$ , por lo tanto,  $P(\overline{A}) = \frac{4}{8} = 0.5$

d.  $\overline{B} = \{3, 6, 8\}$ , por lo tanto,  $P(\overline{B}) = \frac{3}{8} = 0.375$

e.  $\overline{A \cup B} = \{6, 8\}$ , por lo tanto,  $P(\overline{A \cup B}) = \frac{2}{8} = 0.25$

f.  $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ , por lo tanto,  $P(\overline{A \cap B}) = \frac{5}{8} = 0.625$

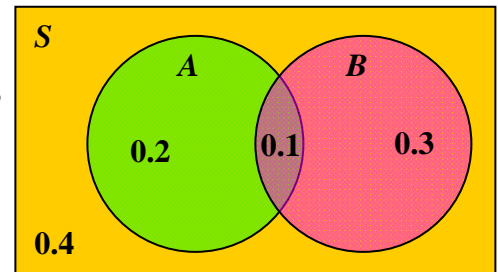




**Ejemplo 21:** Sea  $S$  el espacio muestral donde  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.4$  y  $P(A \cap B) = 0.1$ . Halle las siguientes probabilidades:

- |    |                   |    |                          |
|----|-------------------|----|--------------------------|
| a. | $P(A \cup B)$     | b. | $P(\overline{A})$        |
| c. | $P(\overline{B})$ | d. | $P(A \cap \overline{B})$ |

**Respuesta:** Utilicemos el siguiente diagrama de Venn. Notemos que la región donde  $A$  y  $B$  ocurren simultáneamente tiene probabilidad 0.1. Además observemos que  $P(A) = 0.3$  es igual a la suma de las probabilidades dentro del círculo que representa el evento  $A$ , es decir,  $P(A) = 0.2 + 0.1$ . De manera similar,  $P(B) = 0.3 + 0.1$ .



Por otro lado, notemos que probabilidad de que ocurra  $A$  y no ocurra  $B$  es la diferencia  $0.3 - 0.1$ , es decir, 0.2. Es por esto que insertamos 0.2 dentro de  $A$  y fuera de  $B$ . Además, la probabilidad de que ocurra  $B$  y no ocurra  $A$  es la diferencia  $0.4 - 0.1$ , es decir, 0.3. Es por esto que insertamos 0.3 dentro de  $B$  y fuera de  $A$ . Como  $P(S) = 1$ , entonces la probabilidad de que no ocurra  $A$  y no ocurra  $B$  tiene que ser 0.4 ( $1 - 0.2 - 0.1 - 0.3 = 0.4$ ). Es por esto que insertamos 0.4 fuera de  $A$  y fuera de  $B$ . Entonces tenemos que:

- $P(A \cup B)$  es la probabilidad de que ocurra  $A$ , ocurra  $B$  o ambos, por lo tanto,  $P(A \cup B) = 0.2 + 0.1 + 0.3 = 0.6$
- $P(\overline{A})$  es la probabilidad de que  $A$  no ocurra, por lo tanto,  $P(\overline{A}) = 0.3 + 0.4 = 0.7$ .
- $P(\overline{B})$  es la probabilidad de que  $B$  no ocurra, por lo tanto,  $P(\overline{B}) = 0.2 + 0.4 = 0.6$ .
- $P(A \cap \overline{B})$  es la probabilidad de que ocurra  $A$  y no ocurra  $B$ , por lo tanto,  $P(A \cap \overline{B}) = 0.2$ .

### Ejercicios 5:

1. Si lanzamos dos dados al azar, uno rojo y uno blanco, halle la probabilidad de que:

- a. la suma de ambos dados sea 7.
- b. la suma de ambos dados no sea 6.
- c. la suma de ambos dados sea 2 ó 10.
- d. se obtenga el mismo número en ambos dados.
- e. lo obtenido en el dado rojo sea mayor que lo obtenido en el dado blanco.

2. Sea  $S = \{ a, e, i, o, u \}$ ,  $A = \{ e, o, u \}$  y  $B = \{ a, u \}$ . Halle:

- a.  $P(A \cup B)$
- b.  $P(A \cap B)$
- c.  $P(\overline{A})$
- d.  $P(\overline{B})$
- e.  $P(\overline{A \cup B})$

3. Considere el espacio muestral  $S$  donde  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.4$  y

$P(A \cap B) = 0.3$ . Halle:

- a.  $P(A \cup B)$
- b.  $P(\overline{A})$
- c.  $P(A \cup \overline{B})$
- d.  $P(\overline{A \cap B})$

## REGLA DE LA SUMA

La regla de la suma es un método para calcular probabilidades que pueden expresarse de la forma  $P(A \text{ o } B)$  o  $P(A \cup B)$ , es decir, la probabilidad de que  $A$  ocurra o de que ocurra  $B$  (o de que ambos ocurran). Para calcular la probabilidad de que ocurra el evento  $A$  o el evento  $B$ , primero debemos determinar de cuántas formas distintas  $A$  ocurre y de cuántas formas distintas  $B$  ocurre, pero al computar el número total de formas no podemos contar un mismo resultado más de una vez.

La palabra clave es “o”. En el desarrollo de este módulo usaremos el “o” inclusivo, que significa: uno o el otro o ambos.

### **Regla de la Suma**

Sean  $A$  y  $B$  dos eventos de un mismo espacio muestral  $S$ , entonces

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

donde  $P(A \text{ y } B)$  denota la probabilidad de que  $A$  y  $B$  ocurran al mismo tiempo.

En la notación de conjuntos, la regla de la suma es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Ejemplo 22:** Una compañía le administra un examen a un grupo de 40 de sus empleados, que aspiran a cierta posición, para cualificarlos. La siguiente tabla resume los resultados divididos por género:

	Masculino (M)	Femenino (F)
Aprobó	7	2
Fracasó	18	13

Si uno de estos empleados es seleccionado al azar, halle la probabilidad de que:

- a. sea masculino o aprobó el examen
- b. sea femenino o fracasó

**Respuesta:** Utilizando la regla de la suma, tenemos que:

$$a. \quad P(\text{M o aprobó}) = P(\text{M}) + P(\text{aprobó}) - P(\text{M y aprobó})$$

$$= \frac{25}{40} + \frac{9}{40} - \frac{7}{40} = \frac{27}{40}$$

$$b. \quad P(\text{F o fracasó}) = P(\text{F}) + P(\text{fracasó}) - P(\text{F y fracasó})$$

$$= \frac{15}{40} + \frac{31}{40} - \frac{13}{40} = \frac{33}{40}$$

**Definición:**

Sean  $A$  y  $B$  dos eventos de un mismo espacio muestral  $S$ . Decimos que  $A$  y  $B$  son **eventos mutuamente excluyentes** si no pueden ocurrir simultáneamente, es decir,  $A \cap B = \phi$ . Por lo tanto, si  $A$  y  $B$  son eventos mutuamente excluyentes, entonces  $P(A \cap B) = 0$ .

**Ejemplo 23:** En el experimento de lanzar un dado al azar, el espacio muestral es  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Si  $A$  es el evento de obtener un número par y  $B$  es el evento de obtener un número impar, entonces  $A$  y  $B$  son eventos mutuamente excluyentes pues no pueden ocurrir simultáneamente (si uno ocurre el otro no puede ocurrir).

La regla de la suma ya discutida establece que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Sin embargo, si  $A$  y  $B$  son eventos mutuamente excluyentes, entonces la regla de la suma será:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ya que  $P(A \cap B) = 0$ .

Claramente un evento cualquiera  $A$  y su complemento  $\bar{A}$  son mutuamente excluyentes. Además, en todo experimento uno de ellos ocurre. Esto es debido a que o  $A$  ocurre o  $A$  no ocurre (lo que implica que  $\bar{A}$  ocurre). Entonces tenemos que:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Este resultado de la regla de la suma da lugar a las siguientes tres formas equivalentes:

1.  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
2.  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
3.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

**Ejemplo 24:** Una compañía que produce radios sabe que el 2.5% de los radios que produce salen defectuosos. Si seleccionamos al azar uno de estos radios, ¿cuál es la probabilidad de que el radio no esté defectuoso?

**Respuesta:** Sea  $D$  el evento de que salga defectuoso. Notemos que su complemento  $\bar{D}$  será que no salga defectuoso. Como  $2.5\% = 0.025$ , entonces

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D)$$

$$P(\bar{D}) = 1 - 0.025 = 0.975$$

## PROBABILIDAD CONDICIONAL

Ahora consideraremos el principio de que la probabilidad de un evento suele afectarse por el conocimiento previo de las circunstancias. Por ejemplo, si seleccionamos una persona al azar de la población de Puerto Rico, la probabilidad de obtener un varón es cercana a 50%, pero si usted ya sabe que además la persona a seleccionar es fanática del hipismo, entonces la probabilidad de obtener varón aumenta drásticamente ya que cerca del 90% de los fanáticos del hipismo son varones.

### Definición:

La **probabilidad condicional** de un evento  $B$  es la probabilidad de que  $B$  ocurra cuando ya sabemos que otro evento  $A$  ocurrió. Esta probabilidad se denota  $P(B | A)$  y la leemos “la probabilidad de  $B$  dado  $A$ ”.

**Ejemplo 25:** Al lanzar un dado, halle la probabilidad de obtener:

- el número 4 dado que se obtuvo un número par.
- un número impar dado que se obtuvo un número menor que 6.

**Respuesta:** Utilizando la probabilidad condicional, tenemos lo siguiente:

- Sabemos que se obtuvo un número par, por lo que hay 3 posibles resultados: 2, 4 ó 6, de los cuales en sólo uno de ellos ocurre el 4. Por lo tanto,  $P(4 | \text{par}) = \frac{1}{3}$ .
- Sabemos que se obtuvo un número menor que 6, por lo que hay 5 posibles resultados: 1, 2, 3, 4 ó 5, de los cuales en tres de ellos obtenemos un número impar. Por lo tanto,

$$P(\text{impar} | \text{menor que 6}) = \frac{3}{5}.$$

### Regla de la Probabilidad Condicional

Sean  $A$  y  $B$  dos eventos de un mismo espacio muestral  $S$ , entonces:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)} \quad \text{donde } P(B) > 0$$

y

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \text{ y } A)}{P(A)} \quad \text{donde } P(A) > 0.$$

**Ejemplo 26:** ¿Cuál es la probabilidad de que una carta de póker escogida al azar de un paquete completo de cartas sea un as, sabiendo que la carta es roja?

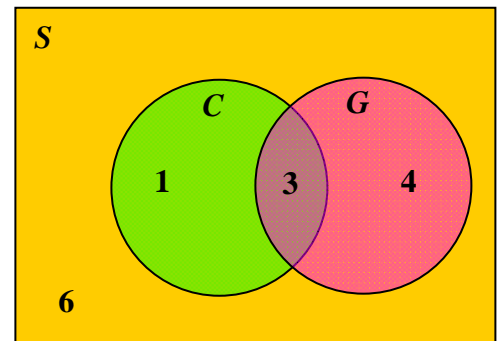
**Respuesta:** Las cartas de póker son 52. Estas se componen de 26 cartas rojas y 26 cartas negras. Además, las 26 cartas rojas se dividen en 13 cartas de corazones (♥) y 13 de diamantes (♦). Las 26 cartas negras se dividen en 13 cartas de espada (♠) y 13 de trébol (♣). Cada uno de los grupos de 13 cartas tiene una carta de cada uno de los siguientes caracteres A, 1, 2, ..., 10, J, Q, K. Entonces

$$\begin{aligned} P(\text{as} | \text{roja}) &= \frac{P(\text{as y roja})}{P(\text{roja})} \\ &= \frac{2}{26} \\ P(\text{as} | \text{roja}) &= \frac{2}{52} \\ P(\text{as} | \text{roja}) &= \frac{2}{52} \cdot \frac{52}{26} = \frac{1}{13}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 27:** De un total de 14 músicos hay 4 que tocan el cuatro, 7 que tocan guitarra y 3 que tocan ambos instrumentos. Si seleccionamos al azar uno de estos músicos, halle la probabilidad de que toque el cuatro dado que toca guitarra.

**Respuesta:** Utilicemos el siguiente diagrama de Venn. Utilicemos  $C$  para representar el evento de obtener un cuatrista y  $G$  para representar el evento de obtener un guitarrista. Como hay 3 músicos que tocan ambos instrumentos, entonces en la intersección de  $C$  y  $G$  hay 3 elementos. Ahora, hay 4 músicos que tocan el cuatro de los cuales ya tenemos contados 3 (los que tocan ambos instrumentos), por lo que queda 1 que es un elemento de  $C$  pero no de  $G$ . Además, hay 7 músicos que tocan la guitarra de los cuales ya tenemos contados 3 (los que tocan ambos instrumentos), por lo que quedan 4, los cuales son elementos de  $G$  pero no de  $C$ . Finalmente nos quedan 6 músicos que no tocan cuatro ni guitarra.

Recuerde que  $P(C \text{ y } G)$  es la probabilidad de obtener un músico que toque cuatro y guitarra, por lo tanto,  $P(C \text{ y } G) = \frac{3}{14}$ . Por otro lado,  $P(G)$  es la probabilidad de obtener un músico que toque guitarra, por lo tanto,  $P(G) = \frac{7}{14}$ .



Utilizando la regla de probabilidad condicional tenemos que:

$$P(C | G) = \frac{P(C \text{ y } G)}{P(G)}$$

$$P(C | G) = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{7}{14}}$$

$$P(C | G) = \frac{3}{14} \cdot \frac{14}{7}$$

$$P(C | G) = \frac{3}{7}$$



## Casos Especiales de la Probabilidad Condicional

1. Una vez un evento  $A$  ya ha ocurrido, es seguro que  $A$  ocurra:

$$P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

2. Cuando  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes, una vez ha ocurrido  $A$ , es imposible que  $B$  ocurra:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

### Ejercicios 6:

1. Un envase contiene 3 fichas negras, 2 fichas azules y 5 fichas rojas. Las fichas son todas iguales excepto en el color. Si seleccionamos una ficha de estas fichas al azar, halle la probabilidad de que la ficha

- sea negra o roja
- no sea negra.
- sea azul dado que es roja.
- sea negra dado que es negra.

2. A un total de 50 trabajadores se les preguntó si trabajaban para alguna agencia de gobierno o para la empresa privada. La siguiente tabla muestra los resultados divididos por el área de residencia (área metro o isla).

	Metro	Isla
Gobierno	11	18
Empresa Privada	14	7

Si seleccionamos una de estas personas al azar, halle la probabilidad de que la persona

- a. trabaje para la empresa privada o viva en área metro.
- b. trabaje para el gobierno o viva en área isla.
- c. trabaje para la empresa privada dado que vive en área isla.
- d. trabaje para el gobierno dado que vive en área metro.
- e. no viva en área isla.

3. Si seleccionamos una carta al azar de un paquete completo de cartas de póker, halle la probabilidad de que la carta sea

- a. de diamante o sea una J.
- b. un 2 o sea un as.
- c. de corazón dado que es K.
- d. K dado que es de corazón.
- e. Q dado que no es espada.
- f. de diamante dado que no es 3.
- g. una K dado que es un 10.

4. Una nutricionista preguntó a 30 de sus clientes si consumían frutas y vegetales en su dieta diaria. Encontró que 15 consumen frutas, 8 consumen vegetales y 6 consumen ambos grupos alimenticios en su dieta diaria. Si seleccionamos al azar una de estas personas, halle la probabilidad de que en su dieta diaria consuma

- a. frutas o vegetales.
- b. vegetales dado que consume frutas.
- c. frutas dado que no consume vegetales.
- d. ni frutas ni vegetales

## REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN

Ya presentamos la regla de la suma que se utiliza para calcular  $P(A \text{ o } B)$  o  $P(A \cup B)$ . Ahora discutiremos la regla de la multiplicación, la cual nos provee un método para calcular probabilidades que pueden expresarse de la forma  $P(A \text{ y } B)$  o  $P(A \cap B)$ . Es decir, la probabilidad de que  $A$  ocurra y de que ocurra  $B$  al mismo tiempo. Para calcular la probabilidad de que ocurra el evento  $A$  y el evento  $B$  al mismo tiempo, primero debemos determinar de cuántas formas distintas  $A$  ocurre y luego determinar de cuántas formas distintas  $B$  ocurre, dado que ya ocurrió  $A$ . Otra forma de hacerlo es, primero determinar de cuántas formas distintas  $B$  ocurre y luego determinar de cuántas formas distintas  $A$  ocurre, dado que ya ocurrió  $B$ .

### **Regla de la Multiplicación**

Sean  $A$  y  $B$  dos eventos de un mismo espacio muestral  $S$ , entonces

$$P(A \cap B) = P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

o

$$P(A \cap B) = P(A \text{ y } B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

**Ejemplo 28:** En un grupo de 25 personas hay 16 de ellas casadas y 9 solteras. ¿Cuál es la probabilidad de que si dos de estas personas son seleccionadas aleatoriamente sean ambas casadas?

**Respuesta:** Notemos que al seleccionar la primera persona, la probabilidad de que sea casada es  $\frac{16}{25}$ . Pero al seleccionar la segunda persona quedan 24

posibles ya que una ha sido seleccionada. Ahora dado que la primera persona seleccionada es casada, entonces quedan 15 casadas posibles para la segunda selección. Por lo tanto, la probabilidad de que la segunda sea casada dado que la primera fue casada es  $\frac{15}{24}$ . Luego, utilizando la regla de la multiplicación, tenemos que:

$$P(\text{1ra sea casada y 2da sea casada}) = P(\text{1ra sea casada}) \cdot P(\text{2da sea casada} \mid \text{1ra sea casada})$$

$$= \frac{16}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{2}{5}$$

### Definición:

Sean  $A$  y  $B$  dos eventos de un mismo espacio muestral  $S$ . Decimos que  $A$  y  $B$  son **eventos independientes** si y sólo si la probabilidad de que uno de ellos ocurra no es afectada por la ocurrencia del otro. Si los eventos  $A$  y  $B$  no son independientes, se dice que son **dependientes**.

La anterior definición tiene las siguientes implicaciones:

1. Si  $A$  y  $B$  son eventos independientes, entonces  $P(A|B) = P(A)$  y  $P(B|A) = P(B)$ .

Esto dice que la probabilidad de que  $A$  ocurra dado que  $B$  ocurrió es la misma que tiene  $A$  antes de  $B$  ocurrir. Por otro lado, la probabilidad de que  $B$  ocurra dado que  $A$  ocurrió es la misma que tiene  $B$  antes de  $A$  ocurrir.

2. Si  $A$  y  $B$  son eventos independientes, entonces

$$\begin{aligned} P(A \text{ y } B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

Esto dice que la probabilidad de que  $A$  y  $B$  ocurran al mismo tiempo es el producto de sus probabilidades.

3. Si  $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$ , entonces  $A$  y  $B$  son eventos independientes.

**Ejemplo 29:** Una caja contiene 5 canicas verdes, 2 azules y 3 rojas. Si escogemos dos canicas al azar ( una primero y luego la otra) de esta caja, halle la probabilidad de que ninguna de ellas sea roja:

- con reemplazo (echando a la caja la primera canica antes de la segunda selección). ¿Son los eventos independientes o dependientes?
- sin reemplazo (la primera canica queda fuera de la caja para la segunda selección). ¿Son los eventos independientes o dependientes?

**Respuesta:**

a. Notemos que:  $P(\text{primera no sea roja}) = \frac{7}{10}$  y como volvemos a echar a la caja la primera canica, para la segunda selección hay el mismo número de canicas en la caja. Por lo tanto,  $P(\text{segunda no sea roja} \mid \text{primera no fue roja}) = \frac{7}{10}$ .

Esto dice que los eventos son independientes porque uno no afecta la probabilidad de que el otro ocurra. Entonces

$$\begin{aligned} P(\text{ambas no sean rojas}) &= P(\text{primera no sea roja y segunda no sea roja}) \\ &= P(\text{primera no sea roja}) \cdot P(\text{segunda no sea roja} \mid \text{primera no fue roja}) \\ &= \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100} . \end{aligned}$$

b. Notemos que:  $P(\text{primera no sea roja}) = \frac{7}{10}$  y como no volvemos a echar a la caja la primera canica, para la segunda selección hay una canica menos en la caja. Por lo tanto,  $P(\text{segunda no sea roja} \mid \text{primera no fue roja}) = \frac{6}{9}$ . Esto dice que los eventos son dependientes porque uno afecta la probabilidad de que el otro ocurra. Entonces

$$\begin{aligned}
 P(\text{ambas no sean rojas}) &= P(\text{primera no sea roja y segunda no sea roja}) \\
 &= P(\text{primera no sea roja}) \cdot P(\text{segunda no sea roja} \mid \text{primera no fue roja}) \\
 &= \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \\
 &= \frac{7}{15} .
 \end{aligned}$$

### Ejercicio 7:

Se realiza un sorteo de una estufa y una nevera, en este orden, entre 10 mujeres y 10 hombres participantes.

- Si una misma persona puede ganarse ambos premios, halle la probabilidad de que ambos enseres se los gane una mujer. ¿Son los eventos independientes o dependientes?
- Si una misma persona no puede ganarse ambos premios, halle la probabilidad de que de que ambos enseres se los gane una mujer. ¿Son los eventos independientes o dependientes?

## REGLAS DE CONTEO

El hallar la probabilidad de que ocurra un evento a veces no plantea ningún problema complejo, ya que los posibles resultados son un número reducido y se pueden contar con facilidad. Por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar un dado al azar salga el número 2. Tan sólo hay un resultado favorable, mientras que el número de resultados posibles es seis. Sin embargo, a veces calcular el número de resultados favorables y casos posibles es complejo y para calcularlos hay que aplicar reglas matemáticas. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar una mano de 5 cartas sin reemplazo de un paquete completo de cartas de poker, obtengamos 3 cartas que sean K y 2 que no sean K? En este caso, determinar el número de resultados favorables y de resultados posibles es complejo. La respuesta la daremos más adelante.

A continuación presentaremos algunas reglas matemáticas que nos pueden ayudar con el cálculo de resultados sin tener que hacer listas ni contar posibilidades directamente. Comenzaremos con la regla fundamental de conteo.

### ***Regla Fundamental de Conteo***

Para una secuencia de dos eventos en la que el primero puede ocurrir de  $m$  formas distintas y el segundo puede ocurrir de  $n$  formas distintas, ambos sucesos pueden ocurrir de  $m \cdot n$  formas distintas.

La regla fundamental de conteo se extiende a situaciones que implican más de dos eventos, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 30:** Para llegar de la ciudad X a la ciudad Y hay 5 rutas distintas. Para llegar de la ciudad Y a la ciudad Z hay 6 rutas distintas. Si todas las rutas para llegar desde la ciudad X a la ciudad Z pasan por la ciudad Y, ¿cuántas rutas distintas hay para llegar de la ciudad X a la ciudad Z?

**Respuesta:** Utilizando la regla fundamental de conteo tenemos que para llegar de la ciudad X a la ciudad Z hay  $5 \cdot 6$ , o sea, 30 rutas distintas.

**Ejemplo 31: (Pega 3)** El juego de Pega 3 consiste en acertar un número de tres dígitos de 0 al 9 inclusive, el cual es seleccionado al azar. Como por ejemplo, 072. ¿Cuántos números de tres dígitos distintos hay?

**Respuesta:** Como son tres dígitos distintos en el proceso de selección, tenemos 10 opciones para el primer dígito, 9 opciones para el segundo dígito y 8 opciones para el tercer dígito. Utilizando la regla fundamental de conteo tenemos  $10 \cdot 9 \cdot 8$ , o sea, 720 números de tres dígitos distintos.

**Ejemplo 32:** ¿Cuántas tablillas de autos con tres letras y tres dígitos son posibles, si sólo utilizamos 26 de las letras de nuestro alfabeto?

**Respuesta:** Como son tres letras y tres dígitos en el proceso de selección, tenemos 26 opciones para cada letra y 10 opciones para cada dígito. Utilizando la regla fundamental de conteo tenemos  $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ , o sea, 17,576,000 tablillas posibles.



Antes de pasar a la siguiente regla definamos el ***símbolo factorial*** ! que denota el producto de números enteros positivos decrecientes. Por ejemplo,  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ . Por definición,  $0! = 1$ .

### ***Regla Factorial***

Una colección de  $n$  elementos distintos se pueden ordenar de  $n!$  formas distintas.

La anterior regla refleja el hecho de que el primer elemento tiene  $n$  posibilidades, el segundo  $n - 1$  posibilidades, y así sucesivamente.

**Ejemplo 33:** ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar 5 personas en una fila?

**Respuesta:** Notemos que tenemos 5 elementos distintos y van a ser todos ordenados. Utilizando la regla factorial tenemos  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  formas distintas de ordenar 5 personas en una fila.

**Ejemplo 34:** Un turista llega a la ciudad de Orlando, Florida y desea visitar en una semana los parques: Magic Kingdom, Epcot Center, Animal Kingdom, MGM Studios, Universal Studios, Island of Adventure y Sea World. ¿De cuántas secuencias distintas puede visitar estos 7 parques sin ir a cada parque más de una vez?

**Respuesta:** Notemos que el turista tiene 7 parques distintos para visitar y queremos saber en cuántos órdenes distintos lo puede hacer. Utilizando la regla factorial tenemos  $7! = 5,040$  formas distintas de visitar los 7 parques.

En la regla anterior presentamos cómo calcular el número total de formas distintas en que todos los  $n$  elementos distintos pueden ser ordenados. La siguiente regla nos dice cómo calcular el número total de formas distintas en que  $r$  de los  $n$  objetos distintos pueden ser ordenados. Esta forma se conoce como la **regla de las permutaciones**. Por ejemplo, calcular las posibles permutaciones de 2 elementos que se pueden formar con los números 1, 2 y 3. Se pueden establecer 6 secuencias (permutaciones) diferentes: (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1) y (3,2). En el cálculo de permutaciones las parejas (1,2) y (2,1) se consideran distintas pues aquí importa el orden.

### **Regla de las Permutaciones**

El número total de permutaciones (secuencias) de  $r$  elementos seleccionados de una colección de  $n$  elementos distintos está dado por

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} .$$

Notemos que si  $r = n$  la regla de permutaciones coincide con la regla factorial.

**Ejemplo 35:** ¿De cuántas formas distintas se pueden repartir las medallas de oro (primer lugar), plata (segundo lugar) y bronce (tercer lugar) en una competencia de 100 metros donde hay 8 participantes?

**Respuesta:** Notemos que tenemos 8 elementos distintos de los cuales 3 recibirán medallas distintas de acuerdo al orden en que lleguen a la meta. Utilizando la regla de las permutaciones tenemos

$${}_8 P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 .$$

Por lo tanto, hay 336 formas distintas de repartir las tres medallas.

**Ejemplo 36:** El campanario de una iglesia tiene 9 campanas, todas de diferentes tonos. ¿Cuántas secuencias distintas de 4 campanazos son posibles sin repetir campana alguna?

**Respuesta:** Notemos que el campanario tiene 9 campanas de tonos distintos de las cuales se tocarán 4 sin repetición de campanas. Utilizando la regla de las permutaciones tenemos

$${}_9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3,024 .$$

Por lo tanto, hay 3,024 secuencias distintas de 4 campanazos.

Otro cálculo importante es determinar el número de combinaciones (grupos de 1, 2, 3, etc. elementos) que se pueden formar con  $n$  elementos distintos sin importar el orden. Cada combinación se diferencia de las otras en los elementos que la componen, sin que influya el orden. Por ejemplo, supongamos que se desea calcular las posibles combinaciones (grupos) de 2 elementos que se pueden formar con los números 1, 2 y 3. Notemos que se pueden establecer 3 parejas diferentes: (1,2), (1,3) y (2,3). Por lo tanto, decimos que hay 3 combinaciones posibles al seleccionar 2 elementos de un total de 3 elementos distintos. En el cálculo de combinaciones las parejas (1,2) y (2,1) se consideran idénticas, por lo que sólo se cuentan una vez. También utilizamos una regla para este cómputo, la cual llamamos **regla de las combinaciones**.

### **Regla de las Combinaciones**

El número total de combinaciones (grupos) de  $r$  elementos seleccionados de una colección de  $n$  elementos distintos está dado por

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} .$$

**Ejemplo 37:** Si tenemos 5 colores distintos y cualquier combinación de estos colores forma un nuevo color, ¿cuántos nuevos colores pueden ser formados combinando 3 de los 5 colores disponibles?

**Respuesta:** Notemos que tenemos 5 colores distintos, de los cuales combinaremos 3. Además, es claro que no importa el orden en que se realice la mezcla, sino los colores seleccionados para la mezcla. Por lo tanto, utilizando la regla de las combinaciones tenemos

$${}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Por lo tanto, se pueden formar 10 colores nuevos distintos.

**Ejemplo 38:** De un total de 10 personas se elegirá un comité de 4 personas. ¿Cuántos resultados distintos son posibles?

**Respuesta:** Notemos que tenemos 10 personas distintas, de las cuales se elegirán 4. Además, es claro que no importa el orden en que se realice la elección, sino las personas seleccionadas para el comité. Por lo tanto, utilizando la regla de las combinaciones tenemos

$${}_{10}C_4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$$

Por lo tanto, se pueden formar 210 comités distintos.

**Ejercicios 8:** Resuelva:

1. Un candado de combinaciones tiene 40 números posibles y abre con una secuencia de 3 diferentes números. Halle el número total de combinaciones posibles para abrir el candado.
2. Un grupo de 9 diferentes cartas son barajadas y puestas sobre una mesa. Si 4 de estas 9 cartas son seleccionadas al azar, halle el número de total de manos diferentes de cuatro cartas que se pueden obtener.
3. Halle el número total de parejas de géneros distintos que pueden formarse entre 5 hombres y 7 mujeres.
4. ¿De cuántos órdenes distintos pueden 8 corredores llegar a la meta?

**PROBABILIDAD UTILIZANDO REGLAS DE CONTEO**

A continuación presentaremos algunos ejemplos donde es vital el uso de las reglas de conteo discutidas anteriormente, pues sin ellas contar las posibilidades sería difícil.

**Ejemplo 39: (Pega 4)** El juego de Pega 4 exacto consiste en acertar un número de cuatro dígitos de 0 al 9 inclusive, el cual es seleccionado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el Pega 4 exacto si jugamos un número de 4 dígitos distintos dado que sabemos que el número ganador tiene 4 dígitos distintos?

**Respuesta:** El número ganador tiene cuatro dígitos distintos. Por lo tanto, hay 10 opciones para el primer dígito, 9 opciones para el segundo dígito, 8 opciones para el tercer dígito y 7 opciones para el cuarto dígito. Utilizando la regla

fundamental de conteo tenemos  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ , o sea 5,040 números de cuatro dígitos distintos, de los cuales jugamos uno. Por lo tanto, la probabilidad de ganar es  $\frac{1}{5,040}$ .

**Ejemplo 40: (La Trifecta)** En las carreras de caballos hay una jugada conocida como la trifecta. La misma consiste en acertar los primeros tres caballos que arribarán a la meta en el orden exacto en que llegarán. Si en una carrera hay 12 caballos compitiendo, todos con igual posibilidad de ganar la carrera, ¿cuál es la probabilidad de ganar la trifecta de un solo intento?

**Respuesta:** Notemos que necesitamos calcular cuántas secuencias de tres dígitos del 1 al 12 inclusive son posibles, importando el orden. Es decir, el número de permutaciones de 3 números seleccionados de 12 posibles números distintos. Por lo tanto,

$${}_{12}P_3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1,320.$$

Por lo tanto, la probabilidad de ganar la trifecta en un solo intento es  $\frac{1}{1,320}$ .

**Ejemplo 41: (La Loto)** El juego de Loto en Puerto Rico consiste en acertar los 6 números ganadores seleccionados al azar del 1 al 46 sin reemplazo sin importar el orden en que salgan. ¿Cuál es la probabilidad de ganar la Loto en un solo intento?

**Respuesta:** Notemos que necesitamos calcular cuántos grupos (no importa el orden) de 6 números son posibles seleccionándolos de un total de 46 números distintos. Es decir, el número de combinaciones de 6 números seleccionados de 46 posibles. Por lo tanto,

$${}_{46}C_6 = \frac{46!}{6!(46-6)!} = \frac{46!}{6! \cdot 40!} = 9,366,819.$$

Por lo tanto, la probabilidad de ganar la Loto en un solo intento es  $\frac{1}{9,366,819}$ .

**Ejemplo 42:** ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar una mano de 5 cartas sin reemplazo de un paquete completo de cartas de póker, obtengamos 3 cartas que sean **K** y 2 que no sean **K**?

**Respuesta:** Notemos primero que las cartas de póker se dividen en 4 que son **K** y 48 que no son **K**. Además, en las manos de cartas no importa el orden, sólo importa qué cartas tenemos. Ahora necesitamos calcular de cuántas formas distintas podemos seleccionar una mano de 5 cartas de un paquete completo de

cartas de póker. Esto es,  ${}_{52}C_5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2,598,960$  manos

distintas de 5 cartas. Luego necesitamos calcular de cuántas formas distintas podemos seleccionar una mano de 3 cartas que sean **K** de un total de 4 cartas que

son **K**. Esto es,  ${}_4C_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$  formas distintas. También

necesitamos calcular de cuántas formas distintas podemos seleccionar una mano de 2 cartas que no sean **K** de un total de 48 cartas que no son **K**. Esto es,

${}_{48}C_2 = \frac{48!}{2!(48-2)!} = \frac{48!}{2! \cdot 46!} = 1,128$  formas distintas. Por último, utilizamos la

regla fundamental de conteo para calcular el número total de formas distintas en que se pueden hacer ambas cosas: seleccionar 3 cartas que sean **K** de 4 posibles y seleccionar 2 que no sean **K** de 48 posibles. Esto es,  $(4)(1,128) = 4,512$ . Por lo tanto, la probabilidad de que al seleccionar al azar una mano de 5 cartas sin reemplazo de un paquete completo de cartas de póker, obtengamos 3 cartas que

sean **K** y 2 que no sean **K** es  $\frac{4,512}{2,598,960} \approx 0.001736$ .

**Ejercicios 9:** Resuelva:

1. Halle la probabilidad de obtener perfecto en una prueba de 5 preguntas de selección múltiple con 4 alternativas cada una si la misma es contestada al azar. Presuma que cada pregunta tiene una sola alternativa correcta.
2. Halle la probabilidad de obtener perfecto en una prueba que consiste de un pareo con 5 conceptos y 5 alternativas si la misma es contestada al azar. Presuma que cada concepto tiene una sola alternativa correcta y no hay repetición de alternativas.
3. En el juego llamado “Big Game” se trata de acertar 6 números ganadores. Los primeros 5 son seleccionados del 1 al 52 inclusive sin reemplazo y sin importar el orden. Por otro lado, el sexto número puede ser cualquiera de los 52 posibles. Halle la probabilidad de ganar el “Big Game” en un solo intento.
4. En las carreras de caballos hay una jugada conocida como la superfecta. La misma consiste en acertar los primeros cuatro caballos en arribar a la meta en el orden exacto en que llegarán. Si en una carrera hay 10 caballos compitiendo, todos con igual posibilidad de ganar la carrera, ¿cuál es la probabilidad de ganar la superfecta de un solo intento?




## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

### Ejercicios 1:

1. a.  $S = \{(1\text{-cara}), (2\text{-cara}), (3\text{-cara}), (4\text{-cara}), (5\text{-cara}), (6\text{-cara}), (1\text{-cruz}), (2\text{-cruz}), (3\text{-cruz}), (4\text{-cruz}), (5\text{-cruz}), (6\text{-cruz})\}$ 
  - b. i. simple
  - ii. no es simple
  - iii. no es simple
  
2. a.  $S = \{FFF, FFM, FMF, FMM, MFF, MFM, MMF, MMM\}$ 
  - b. i. no es simple
  - ii. simple
  - iii. no es simple
  - iv. no es simple

### Ejercicios 2:

1.  $\frac{1}{7}$
  
2.  $\frac{4}{11}$
  
3. a.  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$       b. 
  
4. a.  $\frac{5}{36}$       b. 7
  
5. casada

### Ejercicios 3:

1. a. I      b.  $\frac{7}{25}$       c. O
  
2. La respuesta depende de los resultados obtenidos en el experimento.

### Ejercicios 4:

1. c

2. b

3. a

4. c

### Ejercicios 5:

1. a.  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b.  $\frac{31}{36}$

c.  $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

d.  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

e.  $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

2. a.  $\frac{4}{5}$

b.  $\frac{1}{5}$

c.  $\frac{2}{5}$

d.  $\frac{3}{5}$

e.  $\frac{1}{5}$

3. a. 0.6

b. 0.5

c. 0.9

d. 0.7

### Ejercicios 6:

1. a.  $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b.  $\frac{7}{10}$

c. 0

d. 1

2. a.  $\frac{32}{50} = \frac{16}{25}$       b.  $\frac{36}{50} = \frac{18}{25}$   
c.  $\frac{7}{25}$       d.  $\frac{11}{25}$   
e.  $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$
3. a.  $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$       b.  $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$   
c.  $\frac{1}{4}$       d.  $\frac{1}{13}$   
e.  $\frac{3}{39} = \frac{1}{13}$       f.  $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$   
g. 0
4. a.  $\frac{17}{30}$       b.  $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$   
c.  $\frac{9}{22}$       d.  $\frac{13}{30}$

### Ejercicio 7:

- a.  $\frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{4}$  . Los eventos son independientes.  
b.  $\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38}$  . Los eventos son dependientes.

### Ejercicios 8:

1.  ${}_{40}P_3 = 59,280$  combinaciones posibles para abrir el candado.
2.  ${}_9C_4 = 126$  manos diferentes de cuatro cartas.
3.  $5 \cdot 7 = 35$  parejas de géneros distintos.
4.  $8! = 40,320$  órdenes distintos.

### Ejercicios 9:

$$1. \quad \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{1,024}$$

$$2. \quad \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

$$3. \quad \frac{1}{{}_{52}C_5 \cdot 52} = \frac{1}{135,145,920}$$

$$4. \quad \frac{1}{{}_{10}P_4} = \frac{1}{5,040}$$

## POS-PRUEBA

Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escoja la alternativa correcta.

1. La probabilidad que se basa en el juicio personal de los hechos relevantes se conoce como probabilidad
  - a. empírica
  - b. teórica
  - c. clásica
  - d. subjetiva
  
2. Tres monedas son lanzadas al azar. La probabilidad de que se obtengan exactamente una cara es
  - a.  $\frac{1}{3}$
  - b.  $\frac{3}{8}$
  - c.  $\frac{1}{2}$
  - d.  $\frac{2}{3}$
  
3. Si  $P(A) = 0.2$  y  $P(B) = 0.4$  donde  $A$  y  $B$  son eventos mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de que  $A$  y  $B$  ocurran simultáneamente es:
  - a. 0
  - b. 0.08
  - c. 0.52
  - d. 0.6
  
4. Sea  $P(A) = 0.4$  y  $P(B) = 0.5$ , donde  $A$  y  $B$  son independientes, entonces  $P(A \text{ o } B) =$ 
  - a. 0
  - b. 0.2
  - c. 0.7
  - d. 0.9

Utilice la siguiente información para contestar las preguntas 5 - 7.

Una compañía encuesta anónimamente a 100 de sus empleados preguntándoles si son fumadores o no y si toman alcohol o no. La siguiente tabla ilustra los resultados de una encuesta realizada a esta muestra.

	Fumador	No Fumador	Totales
Toma Alcohol	25	40	65
No Toma Alcohol	5	30	35
Totales	30	70	100

Si seleccionamos, al azar, a un individuo de la muestra:

5. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada sea fumador y que no tome alcohol?
  - a. 0.0500
  - b. 0.1429
  - c. 0.1667
  - d. 0.2000
  
6. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada **no** sea fumador sabiendo que toma alcohol?
  - a. 0.4000
  - b. 0.5714
  - c. 0.6154
  - d. 0.7000
  
7. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada tome alcohol o no sea fumador?
  - a. 0.4000
  - b. 0.5714
  - c. 0.6154
  - d. 0.9500

8. Un envase contiene 3 canicas rojas, 5 azules y 2 blancas. Dos canicas son extraídas al azar y sin reemplazo del envase. La probabilidad de que la segunda canica no sea blanca dado que la primera no fue blanca es:
- a.  $\frac{7}{10}$
  - b.  $\frac{7}{9}$
  - c.  $\frac{8}{10}$
  - d.  $\frac{8}{9}$
9. El número total de comités distintos que pueden formarse seleccionando 3 personas de un total de 12 participantes es:
- a. 6
  - b. 36
  - c. 220
  - d. 1,320
10. Una clave de acceso a una computadora consta de una secuencia de tres vocales distintas. Si seleccionamos una secuencia de tres vocales distintas al azar, la probabilidad de conseguir acceso a la computadora es:
- a.  $\frac{1}{120}$
  - b.  $\frac{1}{60}$
  - c.  $\frac{1}{20}$
  - d.  $\frac{1}{10}$

### **RESPUESTAS DE LA PRE-PRUEBA**

- |      |       |
|------|-------|
| 1. a | 6. a  |
| 2. b | 7. b  |
| 3. a | 8. c  |
| 4. c | 9. c  |
| 5. d | 10. d |

### **RESPUESTAS DE LA POS-PRUEBA**

- |      |       |
|------|-------|
| 1. d | 6. c  |
| 2. b | 7. d  |
| 3. a | 8. b  |
| 4. c | 9. c  |
| 5. a | 10. b |

### **REFERENCIAS**

1. Estadística, Mario F. Triola, Décima Edición, 2009, Addison Wesley
2. Fundamentals of Statistics, Michael Sullivan, Third Edition, 2011, Prentice Hall