TALLER

FUNCIONES EXPONENCIALES

Y LOGARÍTMICAS

Universidad de Puerto Rico en Bayamóm

Departamento de Matemáticas

Preparado por:

Prof. Eileen Vázquez

TABLA DE CONTENIDO

PRE-PRUEBA

1) Halla el valor exacto de:
   a) $\log_2 32$
   b) $\log 10$
   c) $\ln 1$
   d) $5^{\log_5 3}$
   e) $e^{\ln 2 - \ln 3}$

2) Traza la gráfica de las siguientes funciones. Traza también la gráfica de la asíntota, si es distinta al eje de x o al eje de y.
   a) $f(x) = 3^x$
   b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   c) $h(x) = \log_3 x$
   d) $k(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

3) Halla el dominio y la ecuación de la asíntota vertical para la gráfica de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \log_5 x$
   b) $g(x) = \log_3 (x-4)$

4) Halla la función inversa para las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 5^x$
   b) $g(x) = \log_6 x$
   c) $k(x) = \ln(x-2)$

5) Escribe la siguiente expresión como una suma y/o resta de logaritmos. Expresa las potencias como factores.
   $\log \frac{\sqrt[3]{z}}{xy^2}$

6) Escribe como un solo logaritmo:
   $\log_3 x + \log_3 4 + \log_3 (x-1) - 2\log_3 y$

7) Halla el valor exacto de:
   $\frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 16}{\log 5}$.

8) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x-1} = 2^6$

b) $5^{x+3} = \frac{1}{5}$

c) $2^x = 7$

d) $3^{1-2x} = 4^x$

e) $\log_2(4x-1) = 3$

f) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

9) Una substancia se desintegra de acuerdo a la función $Q(t) = 100(2)^{\frac{-t}{5}}$, donde Q (en gramos) es la cantidad presente al cabo de t años. ¿ Cuál será la cantidad presente al cabo de 15 años ?

10) Suponer que la función $P(t) = P_0\, e^{0.04t}$, donde P_0 representa la población inicial y t representa el tiempo medido en años, se usa para predecir el crecimiento poblacional de cierta ciudad. Si la población actual de la ciudad es 50,000 habitantes, ¿ cuánto tiempo le tomará a la ciudad duplicar esta población ?

OBJETIVOS

Al finalizar este taller los participantes podrán:

1) reconocer una función exponencial definida por una regla.

2) trazar la gráfica de una función exponencial definida por una regla.

3) determinar las propiedades de una función exponencial de la forma:
a) $f(x) = a^x$, para $a > 1$ b) $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$

4) determinar las propiedades de una función exponencial, luego de trazar su gráfica.

5) resolver ecuaciones exponenciales con:
a) bases iguales b) bases distintas que se pueden igualar

6) resolver problemas de aplicación en los cuales la función exponencial está dada:
a) hallando valores funcionales b) usando logaritmos

7) hallar el valor racional de un logaritmo.

8) cambiar de forma logarítmica a forma exponencial.

9) cambiar de forma exponencial a forma logarítmica.

10) determinar el dominio y la asíntota vertical de una función logarítmica, cuando el argumento de la función es lineal.

11) trazar la gráfica de una función logarítmica definida por una regla.

12) determinar las propiedades de una función logarítmica de la forma
$f(x) = \log_a x$ **,** para $a > 0$, $a \neq 1$.

13) determinar las propiedades de una función logarítmica, luego de trazar su gráfica.

14) hallar la función inversa de una función exponencial.

15) hallar la función inversa de una función logarítmica.

16) usar las propiedades de los logaritmos para:
a) hallar el valor exacto de una expresión
b) resolver ecuaciones logarítmicas
c) resolver ecuaciones exponenciales

JUSTIFICACIÓN

Muchas situaciones en nuestro mundo presentan crecimiento o decrecimiento que se puede representar mediante una función o modelo exponencial. Ejemplo de esto es el crecimiento natural de bacterias en una colonia, el crecimiento poblacional, la descomposición química, la presión atmosférica y las concentraciones de droga y de alcohol en la sangre, entre otros. Las funciones exponenciales se usan también en estadística para determinar probabilidad. En el área de administración de empresas se usan estas funciones para calcular interés compuesto y depreciación. Entre las funciones exponenciales más usadas está la función exponencial base e, conocida también como la función exponencial natural.

Como se menciona en el párrafo anterior, hay muchos modelos matemáticos que son exponenciales. Los logaritmos son importantes porque nos permiten resolver ecuaciones exponenciales. O sea, usando logaritmos podemos hallar el valor de la variable de una ecuación cuando está usada como un exponente. También hay fórmulas importantes definidas en términos de un logaritmo. Ejemplo de esto es la fórmula usada en la escala Richter, la cual se usa para medir la magnitud e intensidad de un terremoto. El logaritmo en esta fórmula tiene base 10 (logaritmo común). También los logaritmos tienen su uso en química.

FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales son funciones en las cuales la variable independiente está en la posición del exponente. Recordemos que al tener 3^5, al 3 le llamamos la base y al 5 le llamamos el exponente o la potencia. A las funciones exponenciales se les llama de acuerdo al valor de la base. Veamos la definición formal de esta función.

DEFINICIÓN:
Sea x cualquier número real. La función exponencial base a es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo ($a > 0$) y $a \neq 1$.

EJEMPLOS DE FUNCIONES EXPONENCIALES:

1) $f(x) = 2^x$
2) $g(x) = 3^x + 2$
3) $h(t) = 2(5^{t-1})$
4) $F(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
5) $G(x) = e^x$ (e es un número irracional cuyo valor es un decimal infinito no periódico, $e \approx 2.72$)

OBSERVACIÓN: No se incluye la base $a = 1$, porque si $a = 1$ entonces tendríamos la función constante $f(x) = 1^x = 1$. También se excluyen las bases que son negativas, porque, de otra manera tendríamos que excluir muchos valores del dominio de la función. Por ejemplo, si la base fuera -2, entonces:

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \Re$$

$$(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8} \notin \Re$$

$$(-2)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^5} \notin \Re$$

CUIDADO: Es importante distinguir entre la función $f(x) = x^2$, la cual es una función polinomial de grado 2 y la función $g(x) = 2^x$, la cual es una función exponencial de base 2. En una función polinomial, la base es una variable y el exponente es una constante. En una función exponencial, la base es una costante y el exponente es una variable.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

ASÍNTOTA HORIZONTAL

La asíntota horizontal es una recta horizontal a la cual la gráfica de la función se va acercando cuando los valores en el dominio de la función aumentan o disminuyen. Si la gráfica de la función tiene esta asíntota, entonces ella nos describe el comportamiento al final de la gráfica. Las asíntotas no son parte de la gráfica, pero ayudan a trazarla. Como no son parte de la gráfica, por eso se trazan entrecortadas.

DEFINICIÓN: La recta $y = L$ $(L \in \Re)$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la función f si a medida que x disminuye $(x \to -\infty)$ o a medida que x aumenta $(x \to \infty)$, los valores de f se acercan a L.

Esta idea se estudia en Cálculo, usando el concepto del límite de una función.

Recordemos lo siguiente acerca de los exponentes.

LEYES DE LOS EXPONENTES:

Sean a, b, m, n números reales, con $a \neq 0, b \neq 0$.

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

III. $(ab)^m = a^m b^m$

IV. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES:

Sean a, n números reales, con $a \neq 0$ y $n > 0$.

a) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

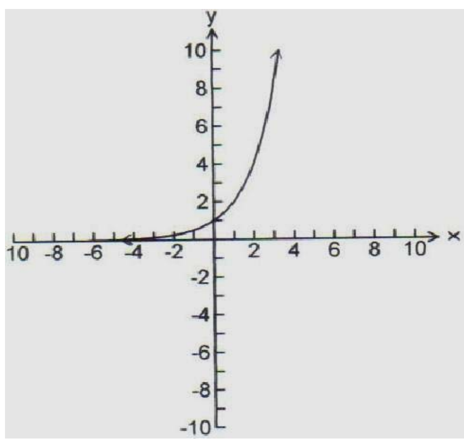
b) $a^0 = 1$

EJEMPLOS: Traza la gráfica de :

1) $f(x) = 2^x$

La variable x puede ser cualquier número real, pero por conveniencia usaremos valores enteros.

x	y	
-4	$2^{-4} = \frac{1}{16}$	$\left(2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}\right)$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\left(2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}\right)$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}\right)$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}\right)$
0	$2^0 = 1$	
1	$2^1 = 2$	
2	$2^2 = 4$	
3	$2^3 = 8$	
4	$2^4 = 16$	



Propiedades de la función que se observan de la gráfica y de la tabla de valores :

1)el dominio (D) es $\Re$

2) el campo de valores (CV) es $(0,\infty)$

3) no hay interceptos en el eje de x

4) el intercepto en el eje de y es (0,1)

5) la función es uno-a-uno

6) la función es creciente en todo su dominio

7) el eje de x (con ecuación $y = 0$) es una asíntota horizontal para la gráfica

De la gráfica se observa que a medida que los valores de x disminuyen, los valores de y se acercan a cero. En símbolo podemos expresar esta idea así:

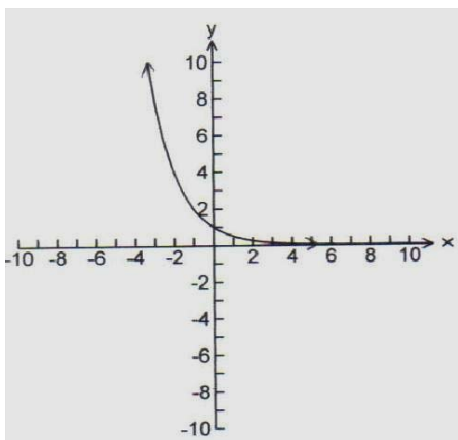
A medida que $x \to -\infty$, $y \to 0$.

2) $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

OBSERVACIÓN:

$$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1^x}{2^x}=\frac{1}{2^x}=2^{-x}$$

x	y
-4	$2^4=16$
-3	$2^3=8$
-2	$2^2=4$
-1	$2^1=2$
0	$2^0=1$
1	$2^{-1}=\frac{1}{2}$
2	$2^{-2}=\frac{1}{4}$
3	$2^{-3}=\frac{1}{8}$
4	$2^{-4}=\frac{1}{16}$



Propiedades de la función que se observan de la gráfica y de la tabla de valores :

1) el dominio (D) es $\Re$
2) el campo de valores (CV) es $(0,\infty)$
3) no hay interceptos en el eje de x
4) el intercepto en el eje de y es (0,1)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es decreciente en todo su dominio
7) el eje de x (con ecuación $y=0$) es una asíntota horizontal para la gráfica
   Esto ocurre porque a medida que los valores de x aumentan, los valores de y se acercan a cero. En símbolos podemos expresar esta idea así:
   A medida que $x\to\infty$, $y\to 0$.

OBSERVACIÓN: Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, podemos usarla para trazar la gráfica de $y = f(-x)$, ya que la gráfica de $y = f(-x)$ es la reflección a través del eje de y de la gráfica de $y = f(x)$.

Si $f(x) = 2^x$ entonces $f(-x) = 2^{-x}$. Por lo tanto, para trazar la gráfica de $y = 2^{-x}$, pudimos haber reflejado la gráfica de $y = 2^x$ a través del eje de y. Esto quiere decir que si el par ordenado (x, y) está en la gráfica de $y = 2^x$ entonces el par ordenado $(-x, y)$ está en la gráfica de $y = 2^{-x}$. Por ejemplo, como el par ordenado (2,4) pertenece a la gráfica de $y = 2^x$ entonces el par ordenado $(-2,4)$ pertenece a la gráfica de $y = 2^{-x}$. O sea, se le cambia el signo a la x de cada par ordenado que está en la gráfica de $y = 2^x$. El valor de y se queda igual. De esta manera se obtienen los pares ordenados de la gráfica de $y = 2^{-x}$.

A continuación, aparecen resumidas las propiedades que se observaron en los ejemplos discutidos. Estas propiedades dependen de la base que tenga la función exponencial.

RESUMEN DE LAS PROPIEDADES PRESENTADAS EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES:

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = a^x$, para $a > 1$:

1) el dominio (D) es $\Re$
2) el campo de valores (CV) es $(0, \infty)$
3) no hay interceptos en el eje de x
4) el intercepto en el eje de y es (0,1)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es creciente en todo su dominio
7) el eje de x (con ecuación $y = 0$) es una asíntota horizontal para la gráfica
   Esto ocurre porque a medida que los valores de x disminuyen, los valores de y se acercan a cero. En símbolos podemos expresar esta idea así:
   A medida que $x \to -\infty$, $y \to 0$.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$:

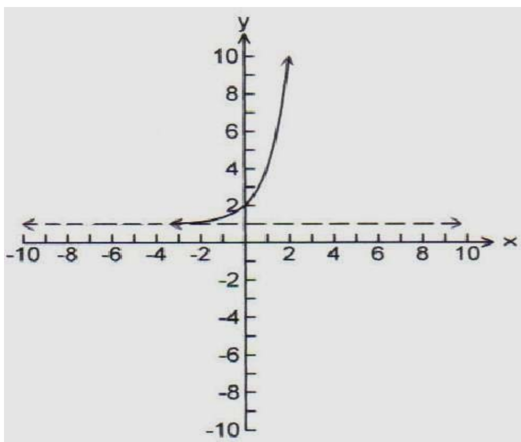
1) el dominio (D) es $\Re$
2) el campo de valores (CV) es $(0, \infty)$
3) no hay interceptos en el eje de x
4) el intercepto en el eje de y es (0,1)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es decreciente en todo su dominio
7) el eje de x (con ecuación $y = 0$) es una asíntota horizontal para la gráfica
   Esto ocurre porque a medida que los valores de x aumentan, los valores de y se acercan a cero. En símbolos podemos expresar esta idea así:
   A medida que $x \to \infty$, $y \to 0$.

Veamos otro ejemplo de la gráfica de una función exponencial.

EJEMPLO: Traza la gráfica de $f(x) = 3^x + 1$.

Haremos una tabla de valores para la función f.

x	y	
-2	$3^{-2} + 1 = 1\frac{1}{9}$	$\left(3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}\right)$
-1	$3^{-1} + 1 = 1\frac{1}{3}$	$\left(3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}\right)$
0	$3^0 + 1 = 2$	$\left(3^0 = 1\right)$
1	$3^1 + 1 = 4$	
2	$3^2 + 1 = 10$	



Esta gráfica tiene una asíntota horizontal que es la recta $y = 1$.

OBSERVACIÓN: Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, entonces la gráfica de $y = f(x) + h$ es la gráfica de $y = f(x)$ movida h unidades hacia arriba si $h > 0$ y h unidades hacia abajo si $h < 0$. En el caso del ejemplo anterior, la gráfica de $f(x) = 3^x + 1$ se puede obtener moviendo 1 unidad hacia arriba la gráfica de la función $y = 3^x$. Al mover la gráfica 1 unidad hacia arriba, también se mueve la asíntota horizontal. Por lo tanto, la ecuación de la asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = 3^x + 1$ es la recta $y = 1$.

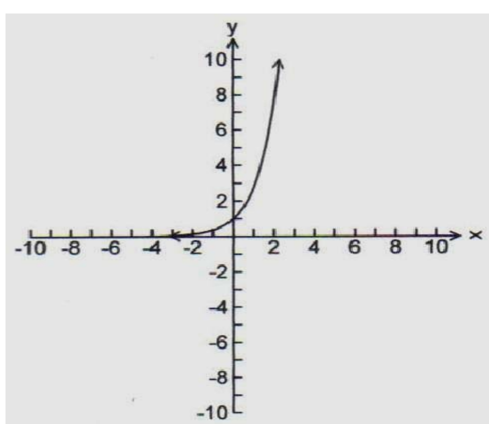
LA BASE e

Esta base es muy importante porque se usa para modelar situaciones que ocurren en la naturaleza. Como ya mencionamos antes, el número e es un número irracional. El número e está definido como el número al cual se acerca la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cuando $n \to \infty$. Como se mencionó anteriormente, esta idea se relaciona con el concepto del límite de una función que se estudia en Cálculo. A este número se le llama e, en honor al matemático suizo Leonard Euler (1707-1783). La función exponencial base e se define como $f(x) = e^x$ y es llamada la función exponencial natural. A continuación aparece su gráfica.

EJEMPLOS: Traza la gráfica de:

1) $f(x) = e^x$ ($e \approx 2.72$)
   Como $e > 1$, la gráfica es creciente en todo su dominio. El intercepto en y es (0,1). La recta $y = 0$ (el eje de x) es la asíntota horizontal. Le aplican las restantes propiedades que se enumeran para la función $f(x) = a^x, a > 1$.

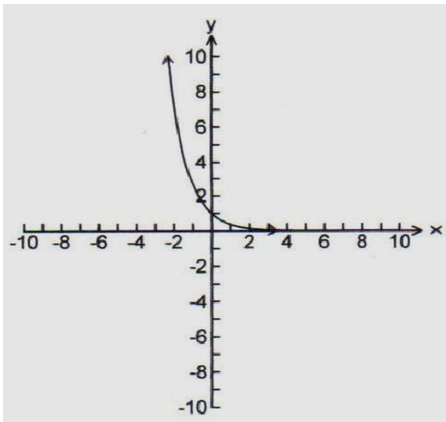
x	y
-2	$e^{-2} \approx 0.14$
-1	$e^{-3} \approx 0.37$
0	1
1	2.72
2	7.39



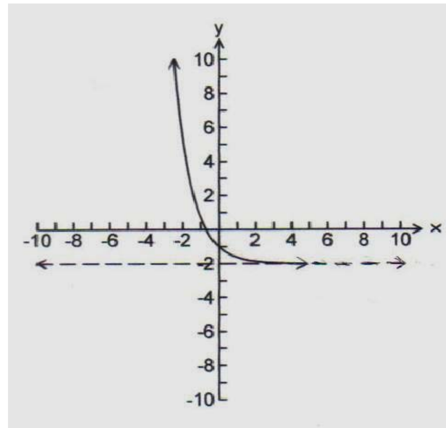
$f(x) = e^x$

2) $g(x) = e^{-x} - 2$

Para trazar la gráfica de $y = e^{-x}$, reflejamos la gráfica de $y = e^{x}$ a través del eje de *y*. Como ya mencionamos, se cambia el signo de la x en cada par ordenado de la tabla anterior. Los signos de la y se quedan igual. La gráfica de $y = e^{-x} - 2$ se obtiene moviendo 2 unidades hacia abajo la gráfica de $y = e^{-x}$. La asíntota horizontal también se mueve 2 unidades hacia abajo. La ecuación de la asíntota horizontal es: $y = -2$.



$y = e^{-x}$



$g(x) = e^{-x} - 2$

ECUACIONES EXPONENCIALES – TIPO I

Las ecuaciones exponenciales son ecuaciones con términos de la forma a^{x}, donde $a > 0$, $a \neq 1$. Estudiaremos primero ecuaciones exponenciales que tienen las bases iguales o bases distintas que se pueden igualar. Llamaremos a estas ecuaciones, Ecuaciones del Tipo I. Para resolver estas ecuaciones se usan las leyes de los exponentes y la propiedad que sigue.

Propiedad I:
Si $a^{p} = a^{q}$ entonces $p = q$.
Esta propiedad se cumple porque las funciones exponenciales son funciones uno-a-uno.

EJEMPLOS: Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $2^{x-1} = 2^{3x}$

2) $5^{1-3x} = \dfrac{1}{5}$

3) $4^{3t} = 8^{t-1}$

4) $e^{x} \cdot e^{3x} = e^{x-1}$

5) $(e^{4})^{x} \cdot e^{x^{2}} = \dfrac{1}{e^{5}}$

SOLUCIÓN:

1) $2^{x-1} = 2^{3x}$

Para resolver estas ecuaciones, las bases deben ser iguales para poder utilizar la Propiedad I. Como en esta ecuación las bases son iguales, procedemos a igualar los exponentes.

$x - 1 = 3x$

$-2x = 1$

$$x = \frac{1}{-2} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-1}{2}$$

La solución de una ecuación se puede escribir como un conjunto, al cual llamamos el conjunto solución (C.S.) de la ecuación.

$\therefore\ C.S. = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ (El símbolo $\therefore$ significa por lo tanto.)

2) $5^{1-3x} = \frac{1}{5}$

Como las bases no son iguales, procedemos a hacerlas iguales.

$5^{1-3x} = 5^{-1}$

Entonces: $1 - 3x = -1$

$-3x = -2$

$$x = \frac{-2}{-3} \quad \text{ó} \quad x = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ C.S.=$\left\{\frac{2}{3}\right\}$

3) $4^{3t} = 8^{t-1}$

Como las bases no son iguales, procedemos a hacerlas iguales

$(2^2)^{3t} = (2^3)^{t-1}$

$2^{6t} = 2^{3t-3}$

Entonces: $6t = 3t - 3$

$3t = -3$

$t = -1$

$\therefore$ C.S.=$\{-1\}$

4) $e^x \cdot e^{3x} = e^{x-1}$

Usando las leyes de los exponentes, efectuamos la operación del lado izquierdo de la ecuación.

$e^{x+3x} = e^{x-1}$

Entonces: $4x = x - 1$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ C.S.$=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

5) $(e^6)^x \cdot e^{x^2} = \dfrac{1}{e^5}$

$$e^{6x} \cdot e^{x^2} = \frac{1}{e^5}$$

Usando las leyes de los exponentes, efectuamos la operación del lado izquierdo de la ecuación.

$$e^{6x+x^2} = e^{-5}$$

Entonces: $6x + x^2 = -5$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x+5)(x+1) = 0$$

$x + 5 = 0$ ó $x + 1 = 0$

$x = -5$ ó $x = -1$

$\therefore$ C.S.$=\{-5, -1\}$

OBSERVACIÓN:

¿ Qué pasaría si quisiéramos resolver la siguiente ecuación?

$$2^x = 7$$

En esta ecuación no se pueden igualar las bases. Se usan logaritmos para resolver este tipo de ecuación. Los logaritmos los estudiaremos más adelante y resolveremos la ecuación planteada.

APLICACIONES:

Como habíamos mencionado antes, las funciones exponenciales tienen diversas aplicaciones, ya que hay situaciones en las distintas disciplinas cuyo comportamiento es exponencial. Veamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS:

1) El número de bacterias en cierta colonia aumentó de 600 a 1,800 entre las 7:00 A.M. y las 9:00 A.M. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, el número de bacterias t horas después de las 7:00 A.M. , está dado por la siguiente función: $f(t) = 600(3)^{\frac{t}{2}}$. Halla el número de bacterias en la colonia a las:

a) 9:00 A.M.

b) 11:00 A.M.

SOLUCIÓN:

a) Es importante observar que t es el número de horas después de las 7:00 A.M.
Por lo tanto, a las 9:00 A.M. han transcurrido 2 horas después de las 7:00 A.M.
$\therefore\ t = 2$
Al evaluar la función en $t = 2$ obtenemos:

$$f(2) = 600(3)^{\frac{2}{2}} = 600(3)^{1} = 600(3) = 1{,}800$$

$\therefore$ A las 9:00 A.M. hay 1,800 bacterias en el cultivo.

b) A las 11:00 A.M. han transcurrido 4 horas después de las 7:00 A.M.
$\therefore\ t = 4$
Al evaluar la función en $t = 4$ obtenemos:

$$f(4) = 600(3)^{\frac{4}{2}} = 600(3)^{2} = 5{,}400$$

$\therefore$ A las 11:00 A.M. hay 5,400 bacterias en el cultivo.

2) La función $D(h) = 5e^{-0.4h}$ puede usarse para hallar el número de miligramos presentes en la sangre de un paciente, h horas después de habérsele admnistrado cierta droga. ¿Cuántos miligramos están presentes en la sangre del paciente después de 6 horas de habérsele administrado la droga?

SOLUCIÓN:

Evaluamos la función para $h = 6$, ya que h representa el número de horas después de habérsele administrado la droga al paciente.

$D(6) = 5e^{-0.4(6)} = 5e^{-2.4} \approx 0.45$ mg (miligramos) (Se usó una calculadora científica para aproximar este resultado. La calculadora nos permite evaluar e^{x} .)

EJERCICIOS DE PRÁCTICA I :

1) Traza la gráfica de las siguientes funciones. Traza también la gráfica de la asíntota, si es distinta al eje de x.

a) $f(x) = 3^x$
b) $g(x) = 3^{-x} - 4$
c) $y = 2^{x+3}$
d) $f(x) = e^x + 3$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^{2x+5} = 3^{x-1}$
b) $2^{2x-1} = 4$
c) $7^{t+3} = \dfrac{1}{7}$
d) $(e^4)^x \cdot e^{x^2} = e^{12}$

3) Suponer que una substancia se va desintegrando al cabo de los años. La función $q(t) = 100(2)^{\frac{-t}{5}}$ nos permite hallar la cantidad en gramos, que queda de esta substancia al cabo de t años. ¿Cuántos gramos quedan de esta substancia al cabo de 10 años ?

4) Suponer que para cierta colonia de bacterias, la cantidad de bacterias presentes al cabo de t horas está dada por la función $Q(t) = 15{,}000e^{0.3t}$. ¿Cuántas bacterias están presentes al cabo de 5 horas?

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Comenzaremos definiendo lo que es un logaritmo.

DEFINICIÓN : Sea a un número real positivo diferente de 1. El exponente único y tal que $a^y = x$, se llama **el logaritmo de** x **a la base** a (o con base a) y se denota por $\log_a x = y$.

La definición anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$, para todo $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $y \in \Re$.

Las dos ecuaciones presentadas en la definición anterior son equivalentes. Esto significa que una implica la otra. A la primera ecuación se le llama la forma logarítmica y a la segunda se le llama la forma exponencial. Las bases son iguales en ambas formas. La variable y es el exponente en la segunda ecuación y es el logaritmo en la primera (ver el diagrama que sigue). Esto nos indica que el logaritmo es un exponente.

$\downarrow$ exponente $\downarrow$

$\log_a x = y$ $\qquad\qquad\qquad$ $a^y = x$

$\uparrow$ $\uparrow$

base

EJEMPLO: Cambia a forma logarítmica:

1) $2^3 = 8$	3) $5^0 = 1$	5) $e^x = 3$
2) $4^{-2} = \frac{1}{16}$	4) $10^3 = 1{,}000$	

SOLUCIÓN:

Usemos el diagrama anterior para hacer el cambio. El exponente se iguala al logaritmo.

1) $\log_2 8 = 3$	3) $\log_5 1 = 0$	5) $\log_e 3 = x$
2) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$	4) $\log_{10} 1{,}000 = 3$	

EJEMPLO: Cambia a forma exponencial:

1) $\log_3 81 = 4$	3) $\log_{10} 0.1 = -1$	5) $\log_e 4 = 2t$
2) $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right) = -1$	4) $\log_2 (x+1) = 5$	

SOLUCIÓN:

Usemos el diagrama anterior para hacer el cambio. El logaritmo es el exponente.

1) $3^4 = 81$	3) $10^{-1} = 0.1$	5) $e^{2t} = 4$
2) $5^{-1} = \frac{1}{5}$	4) $2^5 = x+1$	

EJEMPLO: Halla el valor de los siguientes logaritmos:

1) $\log_5 25$ 4) $\log_9 3$

2) $\log_4 1$ 5) $\log_2 \frac{1}{32}$

3) $\log_3 \frac{1}{3}$

SOLUCIÓN:

Al buscar el logaritmo estamos buscando un exponente.

1) 2 porque $5^2 = 25$

2) 0 porque $4^0 = 1$

3) -1 porque $3^{-1} = \frac{1}{3}$

4) $\frac{1}{2}$ porque $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

5) -5 porque $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

DEFINICIÓN DEL LOGARITMO COMÚN:

El logaritmo común es el que tiene base 10. Se define así:

$\log x = \log_{10} x$, para todo $x > 0$.

EJEMPLO: 1) $\log 100 = \log_{10} 100$

2) $\log 4 = \log_{10} 4$

DEFINICIÓN DEL LOGARITMO NATURAL:

El logaritmo natural es el que tiene base $e.$ se define así:

$\ln x = \log_e x$, para todo $x > 0$.

EJEMPLO: 1) $\ln 3 = \log_e 3$

2) $\ln 1 = \log_e 1$

OBSERVACIÓN: De ahora en adelante al escribir un logaritmo en base 10 y en base e, lo haremos como dicen las definiciones anteriores.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS: PARTE I

Las siguientes propiedades vienen como consecuenia de que el logaritmo es un exponente.

Sea $a > 0, a \neq 1$.

I. $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$

EJEMPLOS: 1) $\log_6 1 = 0$ 2) $\log_2 1 = 0$ 3) $\ln 1 = 0$

II. $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$

EJEMPLOS: 1) $\log_5 5 = 1$ 2) $\log 10 = 1$ 3) $\ln e = 1$

III. $\log_a a^x = x$ porque $a^x = a^x$

EJEMPLOS: 1) $\log_4 4^{10} = 10$

2) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

IV. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$

Razón: Esta propiedad se obtiene de la definición de logaritmo, la cual establece:
si $y = \log_a x$ entonces $a^y = x$ ó $a^{\log_a x} = x$.

EJEMPLOS: 1) $3^{\log_3 4} = 4$

2) $5^{\log_5 \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

3) $10^{\log \sqrt{3}} = \sqrt{3}$

3) $e^{\ln 2} = 2$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Usamos el concepto de un logaritmo para definir una función logarítmica.

DEFINICIÓN:
Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Sea x cualquier número real positivo. La **función logarítmica con base** a se define por $f(x) = \log_a x$ ó $y = \log_a x$, donde $y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$.

GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

ASÍNTOTA VERTICAL

La asíntota vertical es una recta vertical a la cual la gráfica de la función se acerca cuando la variable independiente (x), se acerca a un valor fijo c. Si la gráfica tiene este comportamiento, se dice entonces que la recta $x = c$ es una asíntota vertical para la gráfica. La gráfica de una función nunca interseca la asíntota vertical.

DEFINICIÓN: La recta $x = c$ es una asíntota vertical para la gráfica de la función f si a medida que los valores de x se acercan a un número real c, los valores de la función aumentan ($f(x) \to \infty$) o disminuyen ($f(x) \to -\infty$).
Como ya habíamos mencionado, este comportamiento se estudia en Cálculo, usando el concepto del límite de una función.

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

El dominio (D) de una función logarítmica es el subconjunto de números reales para los cuales la expresión a la cual le hallamos el logaritmo (o sea, el argumento de la función), es siempre un número positivo. Esto lo establece la definición de la función logarítmica que aparece al principio de esta página, cuando dice que la función $f(x) = \log_a x$ está definida cuando x es un número real positivo. Para hallar este dominio formamos una desigualdad colocando el argumento de la función mayor que cero y resolviendo.

EJEMPLO: Traza la gráfica de:

1) $f(x) = \log_2 x$

$y = \log_2 x$

$y = \log_2 x$ si y solo si $2^y = x$

Dominio: $x > 0$

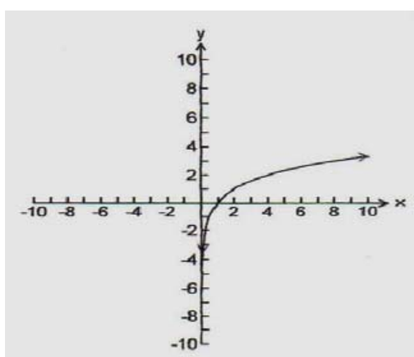
$\therefore\ D = (0, \infty)$

Para hacer la tabla de valores le asignaremos valores a la variable x, para los cuales $\log_2 x$ resulte cómodo de hallar . Siempre es conveniente usar el 1 y la base del logaritmo, así como potencias enteras de la base del logaritmo. Como la base es 2, podemos usar: $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $2^{-2} = \frac{1}{4}$; entre otros.

$y = \log_2 x$ ($\log_2 x = y$ es equivalente a $2^y = x$)

x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

(Esta tabla se puede también construir asignando valores a la variable y, y sustituyendo estos valores en la ecuación $2^y = x$. Los valores de la variable y, pueden ser cualquier número real.)



Propiedades de la función que se observan de la gráfica y de la tabla de valores :

1) el dominio (D) es $(0, \infty)$
2) el campo de valores (CV) es $\Re$
3) no hay intercepto en el eje de y
4) el intercepto en el eje de x es (1,0)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es creciente en todo su dominio
7) el eje de y (con ecuación $x = 0$) es una asíntota vertical para la gráfica

De la gráfica se observa que a medida que los valores de x se acercan a cero por la derecha* , los valores de y disminuyen en sentido negativo. Podemos expresar esta idea así: A medida que $x \to 0^+$, $y \to -\infty$.

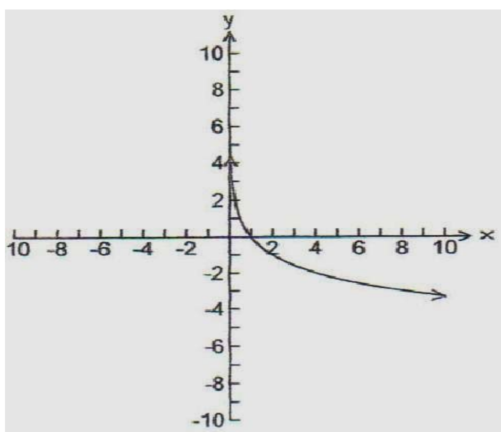
* Decir que los valores de x se acercan al cero por la derecha quiere decir que los valores de la variable x serán números mayores de cero, empezando con números que están lejos del cero y terminando con números cercanos al cero.

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Dominio: $x > 0$
$\therefore\ D = (0, \infty)$

$\log_{\frac{1}{2}} x = y$ ó $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$

x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2



Propiedades de la función que se observan de la gráfica y de la tabla de valores :

1) el dominio (D) es $(0, \infty)$
2) el campo de valores (CV) es $\Re$
3) no hay intercepto en el eje de y
4) el intercepto en el eje de x es (1,0)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es decreciente en todo su dominio
7) el eje de y (con ecuación $x = 0$) es una asíntota vertical para la gráfica
De la gráfica se observa que a medida que los valores de x se acercan a cero por la derecha, los valores de y aumentan en sentido positivo. Podemos expresar esta idea así: A medida que $x \to 0^+$, $y \to \infty$.

RESUMEN DE LAS PROPIEDADES PRESENTADAS EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES PARA LA FUNCIÓN: $f(x) = \log_a x$

1) el dominio (D) es $(0,\infty)$
2) el campo de valores (CV) es $\Re$
3) no hay intercepto en el eje de y
4) el intercepto en el eje de x es (1,0)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es decreciente si $0 < a < 1$
7) la función es creciente si $a > 1$
7) el eje de y (con ecuación $x = 0$) es una asíntota vertical para la gráfica

EJEMPLO: Traza la gráfica de $f(x) = \log_2(x-1)$.

Dominio:
$x-1 > 0$
$x > 1$

Asíntota vertical:
Para hallar la asíntota vertical se iguala el argumento de la función a cero y se resuelve, ya que la gráfica de una función logarítmica puede estar a la derecha o a la izquierda de la asíntota vertical.
$x-1 = 0$
$x = 1$
Por lo tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical para la gráfica.

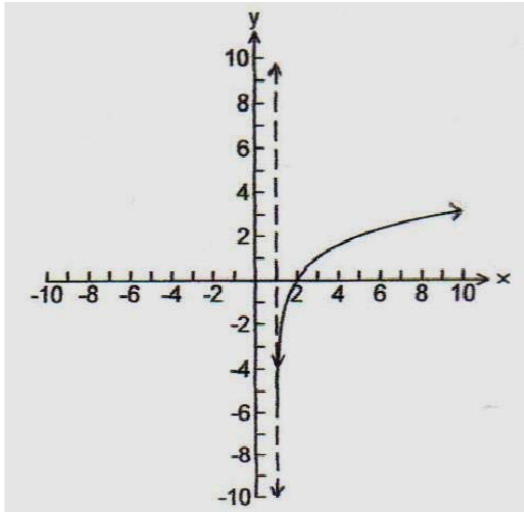
Para hallar los valores de x de la tabla, igualamos el argumento a 1 , a 2 y a potencias enteras de 2, como por ejemplo 4 y 8 ($2^2 = 4$, $2^3 = 8$).

x	y
2	0
3	1
5	2
9	3

$x-1=1$, $x = 2$, $f(2) = 0$
$x-1=2$, $x = 3$, $f(3) = 1$
$x-1=4$, $x = 5$, $f(5) = 2$
$x-1=8$, $x = 9$, $f(9) = 3$

OBSERVACIÓN: Sea $y = f(x)$. La gráfica de $y = f(x-h)$ es la gráfica de la función f movida h unidades hacia la derecha si $h > 0$ y h unidades hacia la izquierda si $h < 0$. Por lo tanto, para trazar la gráfica de $y = \log_2(x-1)$, pudimos haber movido la gráfica de $y = \log_2 x$ (la cual aparece en la página 19), 1 unidad hacia la derecha.

CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR:



EJERCICIOS DE PRÁCTICA II:

1) Cambia a forma logarítmica:

a) $5^3 = 125$ c) $e^0 = 1$

b) $10^{-2} = 0.01$ d) $27^{\frac{1}{3}} = 3$

2) Cambia a forma exponencial:

a) $\log 1{,}000 = 3$ c) $\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_8 4 = \dfrac{2}{3}$ d) $\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right) = -1$

3) Halla el valor de:

a) $\log 0.001$ c) $\ln e^{10}$ e) $5^{\log_5 7}$

b) $\log_2 \dfrac{1}{32}$ d) $\log_{\frac{1}{4}} 4$ f) $e^{\ln 3}$

4) Halla el dominio y la asíntota vertical para la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_4 x$ c) $h(x) = \log(x+3)$

b) $g(x) = 3\log_2(-x) + 1$ d) $p(x) = \log(1-x)$

5) Traza la gráfica de las siguientes funciones. Traza también la gráfica de la asíntota, si es distinta al eje de y.

a) $f(x) = \log_3 x$ c) $F(x) = \log_2 x + 1$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $G(x) = \log_2(x-3)$

RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea $f(x) = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $x \in \Re$.
Sea $g(x) = \log_a x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$.
Tanto f como g son funciones uno-a-uno.

Tenemos que:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$, para todo x en el dominio de g

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x$, para todo x en el dominio de f

Además, tenemos que:
a) Dominio de la función logarítmica = Campo de Valores de la función exponencial $= (0, \infty)$
b) Campo de Valores de la función logarítmica = Dominio de la función exponencial = $\Re$

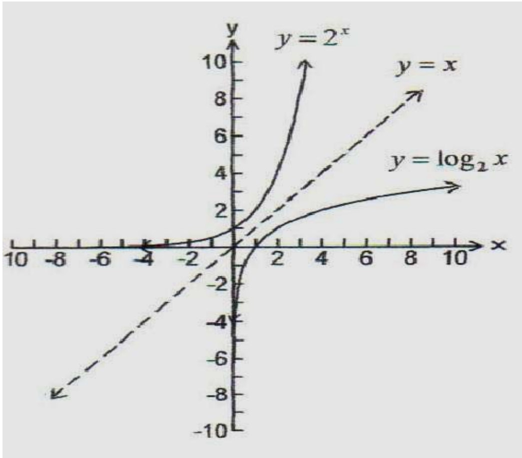
Por lo tanto, la función exponencial base a ($f(x) = a^x$) y la función logarítmica base a ($g(x) = \log_a x$) son funciones inversas. O sea, una función es la inversa de la otra.

EJEMPLO: En el mismo sistema cartesiano, traza la gráfica de:

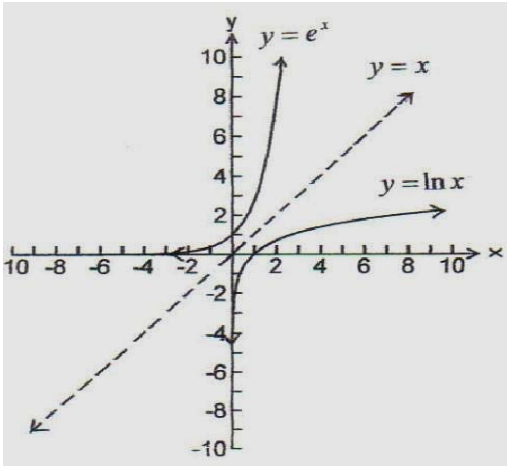
a) $y = 2^x$; $y = \log_2 x$
b) $y = e^x$; $y = \ln x$

SOLUCIÓN:

a)



b)



Como estas parejas de funciones son funciones inversas, entonces sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$. En general, si tenemos la gráfica de $y = a^x$ y la reflejamos a través de la recta $y = x$, obtenemos la gráfica de $y = \log_a x$ y viceversa.

EJEMPLO: Halla la función inversa para las siguientes funciones:

1) $f(x) = 5^x$
2) $f(x) = \log x$
3) $h(x) = 2^{x+1}$
4) $g(x) = \ln(x-1)$

SOLUCIÓN:

Todas las funciones de este ejemplo son funciones uno-a-uno, ya que son funciones exponenciales y logarítmicas.

1) Como la función inversa de $f(x) = a^x$ es $g(x) = \log_a x$, entonces:
$f^{-1}(x) = \log_5 x$.

2) Como la función inversa de $f(x) = \log_a x$ es $g(x) = a^x$, entonces:
$f^{-1}(x) = 10^x$.

3) $h(x) = 2^{x+1}$
$y = 2^{x+1}$
$x = 2^{y+1}$ (Para hallar la función inversa se intercambian x y y.)
$\log_2 x = y + 1$ (Se cambió la ecuación a forma logarítmica.)
$\log_2 x - 1 = y$ (Se resolvió para y.)
$\therefore\ h^{-1}(x) = \log_2 x - 1$ (Se cambió y por $h^{-1}(x)$.)

4) $g(x) = \ln(x-1)$
$y = \ln(x-1)$
$x = \ln(y-1)$
$e^x = y - 1$
$e^x + 1 = y$
$\therefore\ g^{-1}(x) = e^x + 1$

Recuerda los siguientes pasos para hallar la función inversa:
1) Verificar que la función es uno-a-uno.
2) Cambiar la notación funcional por y.
3) Intercambiar x y y.
4) Resolver para la variable y, la ecuación que resultó en el paso anterior.
5) Cambiar la variable y por la notación de función inversa.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS: PARTE II

Sean M, N y a números positivos con $a \neq 1$. Sea r cualquier número real.

I. $\log_a (M\,N) = \log_a M + \log_a N$

II. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

III. $\log_a M^r = r \log_a M$

IV. $\log_a M = \log_a N$ si y sólo si $M = N$

Para trabajar estos ejemplos haremos referencia a las propiedades que aparecen al principio de esta página.

EJEMPLO: Escribe las siguientes expresiones como una suma y/o resta de logaritmos. Expresa las potencias como factores.

1) $\log_a x\sqrt[3]{x+5}$ 2) $\ln \frac{b^2}{(a+1)^3}$

SOLUCIÓN:

1) $\log_a x\sqrt[3]{x+5} = \log_a x + \log_a \sqrt[3]{x+5}$ **(Propiedad I)**

$= \log_a x + \log_a (x+5)^{\frac{1}{3}}$ (Se cambió la notación del radical por la notación exponencial.)

$= \log_a x + \frac{1}{3} \log_a (x+5)$ **(Propiedad III)**

2) $\ln \frac{b^2}{(a+1)^3} = \ln b^2 - \ln (a+1)^3$ **(Propiedad II)**

$= 2 \ln b - 3 \ln (a+1)$ **(Propiedad III)**

EJEMPLO: Halla el valor exacto de:

1) $\log_8 2 + \log_8 4$

2) $e^{\ln 6 - \ln 9}$

SOLUCIÓN:

1) $\log_8 2 + \log_8 4 = \log_8 (2 \cdot 4) = \log_8 8 = 1$

Una suma de logaritmos que tienen la misma base es igual al logaritmo del producto de los números o expresiones a los cuales se les está hallando el logaritmo. O sea, tenemos el lado derecho de la **Propiedad I** y lo igualamos al lado izquierdo de dicha propiedad.

CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR:

2) $e^{\ln 6 - \ln 9} = e^{\ln \frac{6}{9}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (Recuerda: $a^{\log_a x} = x$)

Una resta de dos logaritmos que tienen la misma base es igual al logaritmo de la división de los números o expresiones a los cuales se les está hallando el logaritmo. O sea, tenemos el lado derecho de la **Propiedad II** y lo igualamos al lado izquierdo de dicha propiedad.

ECUACIONES LOGARÍTMCAS

Para resolver las ecuaciones logarítmicas usaremos la forma exponencial de la ecuación y las propiedades de los logaritmos. Todo dependerá del tipo de ecuación que vayamos a resolver.

EJEMPLO: Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $\log_3(4x-2) = 2$
2) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$
3) $\log(2x) - \log(x-3) = 1$
4) $\log_4(t+2) = \log_4 8$

SOLUCIÓN:

1) $\log_3(4x-2) = 2$

Para resolver esta ecuación la cambiamos a la forma exponencial.

$$3^2 = 4x-2$$
$$9 = 4x-2$$
$$11 = 4x$$
$$\frac{11}{4} = x$$

El valor obtenido es solución si al ser sustituido en el argumento de la ecuación original, (o en la base*, según sea el caso), siempre obtenemos un número positivo, ya que el logaritmo de un número negativo no está definido en el conjunto de los números reales.

O sea: $4\left(\frac{11}{4}\right) - 2 > 0$

$$11 - 2 > 0$$
$$9 > 0$$

$\therefore$ C.S = $\left\{\frac{11}{4}\right\}$.

* En el caso de que la variable esté en la posición de la base, tampoco la variable puede tener valor de 1.

2) $\log_5(x+6)+\log_5(x+2)=1$

SOLUCIÓN:
Usamos la **Propiedad I** de los logaritmos, que aparece en la página 30. Convertimos la suma de dos logaritmos con la misma base, en el logaritmo de una multiplicación.

$\log_5[(x+6)(x+2)]=1$

$5^1=(x+6)(x+2)$ (Cambiamos la ecuación a la forma exponencial.)

$5=x^2+8x+12$ (Observa que en este caso se obtuvo una ecuación cuadrática.)

ó

$x^2+8x+12-5=0$ (Igualamos la ecuación cuadrática a cero para resolverla usando el método de factorización.)

$x^2+8x+7=0$

$(x+7)(x+1)=0$

$x+7=0$ ó $x+1=0$

$x=-7$ $x=-1$

$x=-7$ no es una solución porque al sustituirse en $x+6$ obtenemos un número negativo.
Sin embargo al sustituir $x=-1$ en $x+6$ y en $x+2$, obtenemos números positivos.

$\therefore$ C.S. = $\{-1\}$

3) $\log(2x)-\log(x-3)=1$

SOLUCIÓN:
Usamos la **Propiedad II** de los logaritmos, que aparece en la página 30. Usando esta propiedad convertimos la resta de dos logaritmos con la misma base, en el logaritmo de una división.

$\log\dfrac{2x}{x-3}=1$

$10^1=\dfrac{2x}{x-3}$

$10=\dfrac{2x}{x-3}$ (Observa que se obtuvo una ecuación fraccionaria.)

$10(x-3)=2x$ (Se eliminó el denominador.)

$10x-30=2x$

$8x=30$

$x=\dfrac{30}{8}$

$x=\dfrac{15}{4}$

Se obtiene un número positivo al sustituir $\dfrac{15}{4}$ en $2x$ y en $x-3$.

$\therefore$ C.S. = $\left\{\dfrac{15}{4}\right\}$

4) $\log_4(t+2) = \log_4 8$

SOLUCIÓN: Usamos la Propiedad IV de los logaritmos, que aparece en la página 24.
Si $\log_a M = \log_a N$ entonces $M = N$.
Por lo tanto,
$t + 2 = 8$
$t = 6$
Se obtiene un número positivo al sutituir $t = 6$ en $t + 2$.
$\therefore$ C.S. = {6}

TEOREMA DE CAMBIO DE BASE:

Sean a, b y M números reales positivos con $a \neq 1, b \neq 1$. Entonces,

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Este teorema es especialmente útil para aproximar , usando una calculadora, el valor de los logaritmos cuya base es distinta de 10 y de e.

EJEMPLO: Aproxima el $\log_5 3$.

SOLUCIÓN:

$$\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} \approx 0.68261$$

El logaritmo dado se cambió a una fracción en la cual el logaritmo del numerador, al igual que el logaritmo del denominador, tienen base 10. Se recomienda cambiar la base a base 10 ó a base e porque las calculadoras sólo tienen logaritmos en base 10 y base e. Se obtiene la misma respuesta si cambiamos el ejercicio a base e.

$$\log_5 3 = \frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0.6826$$

EJEMPLO: Halla el valor exato de: $\log_2 6 \cdot \log_6 4$.

SOLUCIÓN:

$$\log_2 6 \cdot \log_6 4 = \frac{\log 6}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 6} = \frac{\log 4}{\log 2} = \log_2 4 = 2$$

Primero usamos el Teorema de Cambio de Base para cambiar cada logaritmo. Al final volvemos a usar este teorema para cambiar la fracción a un logaritmo.

ECUACIONES EXPONENCIALES – TIPO II
Estudiaremos en esta parte ecuaciones exponenciales con bases distintas que no se pueden igualar. Usaremos logaritmos para resolver este tipo de ecuación.

EJEMPLO: Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $2^x = 7$

2) $8(3^t) = 6$

3) $3^{2x-1} = 5^x$

4) $e^{x+3} = 2^{x-1}$

SOLUCIÓN:

1) $2^x = 7$

Observamos que no se pueden igualar las bases. Por lo tanto, no podemos usar el método que habíamos explicado anteriormente. En este caso cambiamos la ecuación a la forma logarítmica.

$\log_2 7 = x$ ó $x = \log_2 7$

Usando el Teorema de Cambio de Base podemos escribir la solución de esta otra forma:

$$x = \log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2}$$

2) $8(3^t) = 6$

$3^t = \frac{6}{8}$ (Se despejó para la expresión exponencial.)

$3^t = \frac{3}{4}$

$\log_3\left(\frac{3}{4}\right) = t$ ó $t = \log_3\left(\frac{3}{4}\right)$ (Se cambió la ecuación a la forma logarítmica.)

$$= \frac{\log\left(\frac{3}{4}\right)}{\log 3}$$

3) $3^{2x-1} = 5^x$

Usaremos la propiedad IV de la página 24, la cual establece una equivalencia o una implicación doble. Usaremos esta implicación:
Si $M = N$, entonces $\log_a M = \log_a N$.
Podemos usar cualquier base permitida. La base es un número real positivo y distinto de 1.
Como explicamos anteriormente, se recomienda usar la base 10 y la base e .
Se aplica $\log$ a ambos lados.

$\log 3^{2x-1} = \log 5^x$

$(2x-1)\log 3 = x\log 5$ **(Propiedad III de la página 30)** **Al usar esta propiedad convertimos el exponente en un factor.**

$2x\log 3 - \log 3 = x\log 5$

$2x\log 3 - x\log 5 = \log 3$ (Se agruparon los términos que tienen la variable x .)

$x(2\log 3 - \log 5) = \log 3$ (Se factorizó usando x como factor común.)

$$x = \frac{\log 3}{2\log 3 - \log 5}$$ (Solución exacta de la ecuación)

4) $e^{x-3} = 2^{x-1}$

Es recomendable usar ln, ya que una de las bases es e. El resto del proceso es similar al ejemplo anterior.

$\ln e^{x-3} = \ln 2^{x-1}$

$(x-3)\ln e = (x-1)\ln 2$

$(x-3)(1) = (x-1)\ln 2$ ($\ln e = 1$)

$x-3 = x\ln 2 - \ln 2$

$x - x\ln 2 = 3 - \ln 2$

$x(1-\ln 2) = 3 - \ln 2$

$$x = \frac{3-\ln 2}{1-\ln 2}$$ (Solución exacta de la ecuación)

APLICACIONES

1) Una colonia de bacterias crece de acuerdo a la siguiente función: $N(t) = 100e^{0.045t}$,
donde N se mide en gramos y t representa el tiempo y se mide en días.
¿Qué tiempo le tomará alcanzar 140 gramos?

SOLUCIÓN:

$N(t) = 100e^{0.045t}$,

$140 = 100e^{0.045t}$ (Se sustituyó $N(t)$ por 140.)

Usaremos logaritmo, ya que la variable de la ecuación está en la posición del exponente.

$\frac{140}{100} = e^{0.045t}$ (Se despejó para la expresión que tiene el exponente.)

$1.4 = e^{0.045t}$

$\ln 1.4 = 0.045t$ (Se cambió la ecuación a la forma logarítmica.)

$\frac{\ln 1.4}{0.045} = t$ ó $t = \frac{\ln 1.4}{0.045} \approx 7.5$ días

2) Se puede medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Suponer que el riesgo R (dado como un por ciento) de tener un accidente cuando se maneja un auto se puede modelar por la ecuación, $R = 3e^{kx}$, donde x es la concentración de alcohol en la sangre y k es una constante.

a) Si una concentración de alcohol en la sangre de 0.06, resulta en un riesgo de 10% de tener un accidente, halla el valor de k.
b) Usando el valor de k obtenido, ¿ cual es el riesgo de tener un accidente cuando la concentración de alcohol en la sangre es de 0.17 ?

SOLUCIÓN:

a) $x = 0.06$ $R = 10$

$R = 3e^{kx}$

$10 = 3e^{k(0.06)}$

$\frac{10}{3} = e^{0.06k}$ (Se despejó para la expresión exponencial.)

Cambiamos la ecuación a la forma logarítmica porque la variable para la que vamos a resolver está en el exponente.

$0.06k = \ln\left(\frac{10}{3}\right)$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{0.06} \approx 20.07$$

CONTINUACIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR:

b) $x = 0.17$, $k \approx 20.07$

$R = 3e^{kx}$

$R = 3e^{20.07(0.17)} \approx 91$

$\therefore$ El riesgo es de aproximadamente 91% .

EJERCICIOS DE PRÁCTICA III:

1) Halla la función inversa para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4^x$

b) $g(x) = \log_5 x$

c) $h(x) = 3^{x-2}$

d) $p(x) = \ln(x+1)$

2) Escribe la siguiente expresión como una suma y/o resta de logaritmos.
Expresa las potencias como factores.

$$\log_b \frac{x^5 \sqrt[3]{x+2}}{z^4 y}$$

3) Escribe como un solo logaritmo:

$2\ln x + 3\ln(x-1) - \ln x$

4) Halla el valor exacto de:

a) $\log_6 4 + \log_6 9$

b) $10^{\log 20 - \log 5}$

c) $\log_3 5 \cdot \log_5 9$

5) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2(3x+1) = 3$

b) $\log x + \log(x+3) = 1$

c) $\log_3(2x-1) - \log_3(x-4) = 2$

d) $\log_2(x+3) = \log_2(2x-1)$

e) $7^x = 2$

f) $3^x = 2^{x-1}$

6) El tamaño de una población de insectos al cabo de t días, está dado por la función $P(t) = 500e^{0.02t}$. ¿ Cuándo esta población tendrá 1,000 insectos ?

EJERCICIOS ADICIONALES:

1) Traza la gráfica de las siguientes funciones. Traza también la gráfica de la asíntota, si es distinta al eje de x o al eje de y.

a) $f(x) = 3(2^x)$

b) $g(x) = \log_2 x - 3$

c) $h(x) = \log_3 (x-1)$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $e^{2x} = e^{3x-4}$

b) $3^{x^2-7} = 27^{2x}$

c) $8^t = 3$

d) $5^{2x+1} = 6^{x-2}$

e) $\log(2-4x) = 1$

f) $\ln x + \ln(x-4) = \ln(x+6)$

3) Halla el valor exacto de:

a) $\log_5 125$

b) $\log_4 \dfrac{1}{16}$

c) $\ln\sqrt{e}$

d) $10^{\log 3}$

e) $e^{\ln 2 + \ln 5}$

f) $\dfrac{\log 4}{\log 5} \cdot \dfrac{\log 25}{\log 4}$

4) Escribe la siguiente expresión como una suma y/o resta de logaritmos. Expresa las potencias como factores.

$$\log \frac{\sqrt{a}}{c^6 \sqrt[5]{b}}$$

5) Escribe como un solo logaritmo:

$$3\ln y + \frac{1}{3}\ln(x^2 y) - \ln y^5$$

6) Halla el dominio y la asíntota vertical para la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln x$

b) $g(x) = \log_7 (x+5)$

7) Halla la función inversa para las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x$

b) $g(x) = \log_4 (x+5)$

8) La función $P(t) = 266e^{0.009t}$ describe la población de Estados Unidos a partir del año 1997, medida en millones.

a) ¿Cuál será la población de Estados Unidos para el año 2020 ?

b) ¿Qué tiempo tomará para que la población de Estados Unidos sea 500 millones?

POS-PRUEBA

1) Halla el valor exacto de:

a) $\log_2 32$

b) $\log 10$

c) $\ln 1$

d) $5^{\log_5 3}$

e) $e^{\ln 2 - \ln 3}$

2) Traza la gráfica de las siguientes funciones. Traza también la gráfica de la asíntota, si es distinta al eje de x o al eje de y.

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $h(x) = \log_3 x$

d) $k(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

3) Halla el dominio y la ecuación de la asíntota vertical para la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_5 x$

b) $g(x) = \log_3 (x-4)$

4) Halla la función inversa para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = \log_6 x$

c) $k(x) = \ln(x-2)$

5) Escribe la siguiente expresión como una suma y/o resta de logaritmos. Expresa las potencias como factores.

$$\log \frac{\sqrt[3]{z}}{xy^2}$$

6) Escribe como un solo logaritmo:

$$\log_3 x + \log_3 4 + \log_3 (x-1) - 2\log_3 y$$

7) Halla el valor exacto de:

$$\frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 16}{\log 5}.$$

8) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x-1} = 2^6$

b) $5^{x+3} = \frac{1}{5}$

c) $2^x = 7$

d) $3^{1-2x} = 4^x$

e) $\log_2(4x-1) = 3$

f) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

9) Una substancia se desintegra de acuerdo a la función $Q(t) = 100\,(2)^{\frac{-t}{5}}$, donde Q (en gramos) es la cantidad presente al cabo de t años. ¿ Cuál será la cantidad presente al cabo de 15 años ?

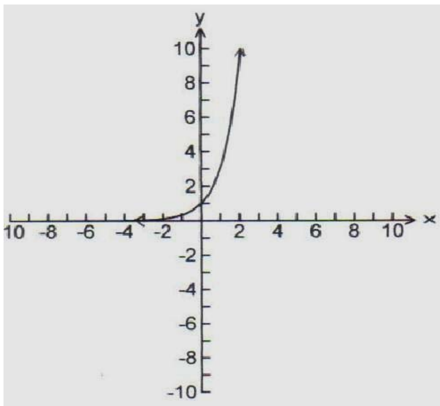
10) Suponer que la función $P(t) = P_0\, e^{0.04t}$, donde P_0 representa la población incial y t representa el tiempo medido en años, se usa para predecir el crecimiento poblacional de cierta ciudad. Si la población actual de la ciudad es 50,000 habitantes, ¿ cuánto tiempo le tomará a la ciudad duplicar esta población ?

RESPUESTAS:

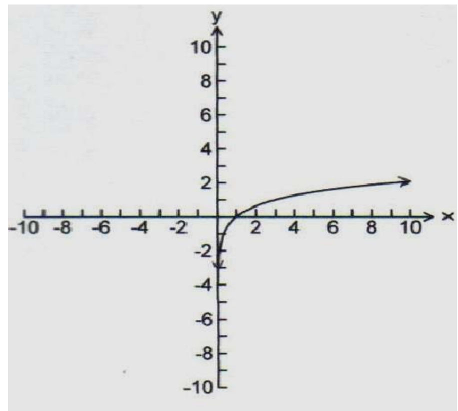
RESPUESTAS DE LA PRE-PRUEBA:

1) a) 5 b) 1 c) 0 d) 3 e) $\frac{2}{3}$

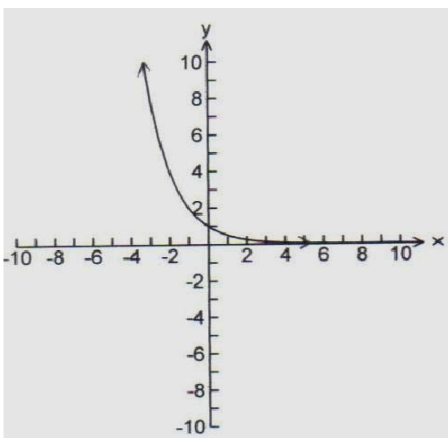
2) a)



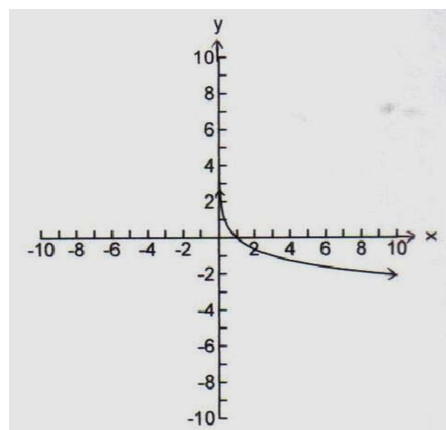
c)



b)



d)



3) a) $D = (0, \infty)$; $x = 0$
b) $D = (4, \infty)$; $x = 4$

4) a) $f^{-1}(x) = \log_5 x$
b) $g^{-1}(x) = 6^x$
c) $k^{-1}(x) = e^x + 2$

5) $\frac{1}{3}\log z - \log x - 2\log y$

CONTINUACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LA PRE-PRUEBA:

6) $\log_3 \dfrac{4x(x-1)}{y^2}$

7) 2

8) a) 7

b) -4

c) $\dfrac{\log 7}{\log 2}$

d) $\dfrac{\log 3}{2\log 3 + \log 4}$

e) $\dfrac{9}{4}$

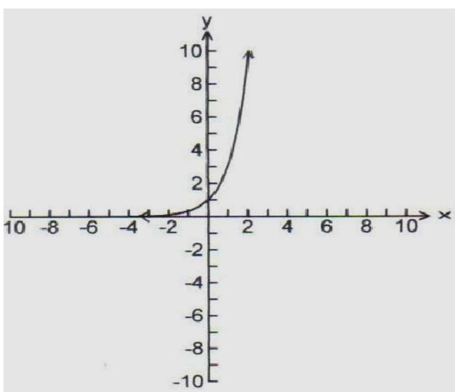
f) 2

9) 12.5 gramos

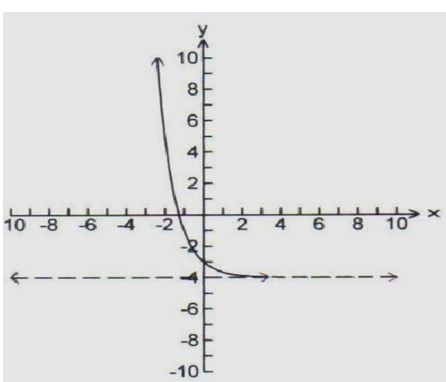
10) aproximadamente 17.3 años

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA I:

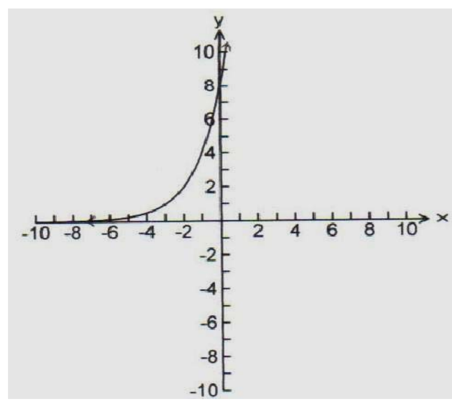
1) a)



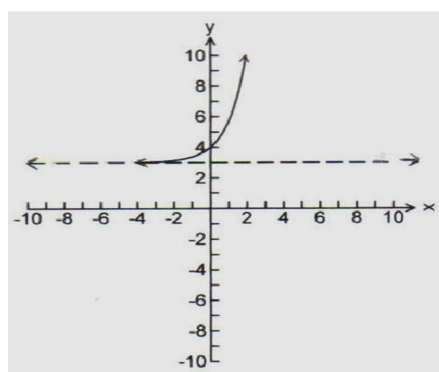
b)



c)



d)



CONTINUACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA I:

2) a) $\{-6\}$

b) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

c) $\{-4\}$

d) $\{-6,2\}$

3) 25 gramos

4) aproximadamente 67,225 bacterias

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA II:

1) a) $\log_5 125 = 3$

b) $\log 0.01 = -2$

c) $\ln 1 = 0$

d) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

2) a) $10^3 = 1{,}000$

b) $8^{\frac{2}{3}} = 4$

c) $25^{\frac{1}{2}} = 5$

d) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

3) a) -3

b) -5

c) 10

d) -1

e) 7

f) 3

4) a) $D = (0, \infty)$; $x = 0$

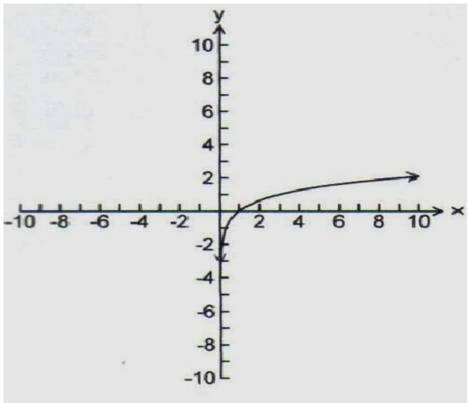
b) $D = (-\infty, 0)$; $x = 0$

c) $D = (-3, \infty)$; $x = -3$

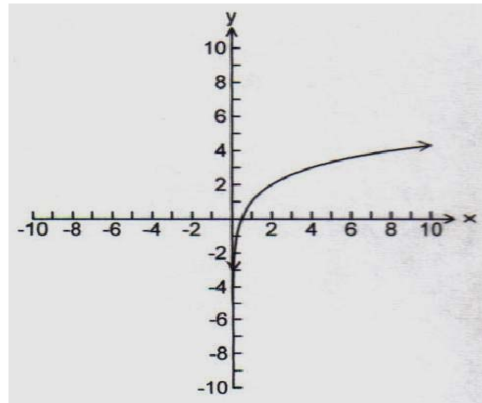
d) $D = (-\infty, 1)$; $x = 1$

CONTINUACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS DE PRÁCTICA II:

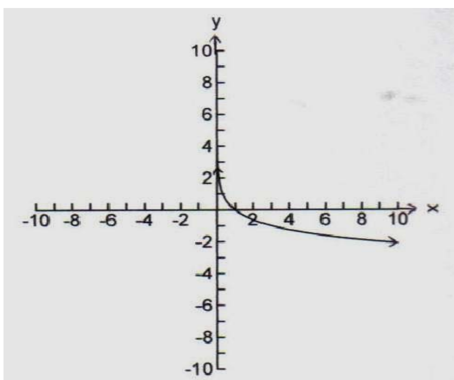
a)



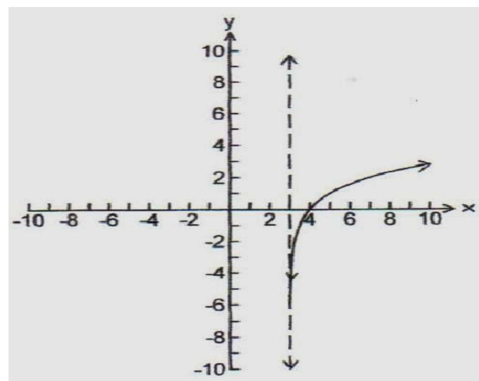
c)



b)



d)



RESPUESTAS DE LOS EJERCICI OS DE PRÁCTICA III:

1) a) $f^{-1}(x) = \log_4 x$ c) $h^{-1}(x) = \log_3 x + 2$

b) $g^{-1}(x) = 5^x$ d) $p^{-1}(x) = e^x - 1$

2) $5\log_b x + \frac{1}{3}\log_b(x+2) - 4\log_b z - \log_b y$

3) $\ln \frac{x^2(x-1)^3}{x}$

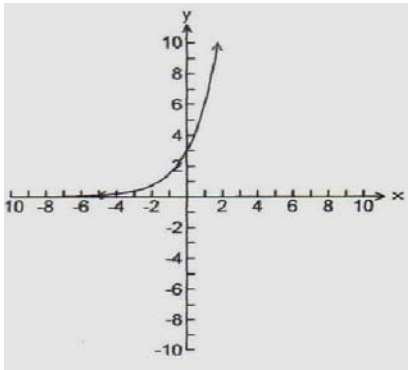
4) a) 2 b) 4 c) 2

5) a) $\left\{\frac{7}{3}\right\}$ b) $\{2\}$ c) $\{5\}$ d) $\{4\}$ e) $\left\{\frac{\log 2}{\log 7}\right\}$ f) $\left\{\frac{\log 2}{\log 2 - \log 3}\right\}$

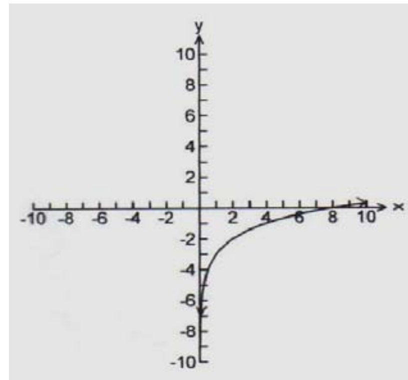
6) Después de aproximadamente 34.7 días.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICI OS ADICIONALES:

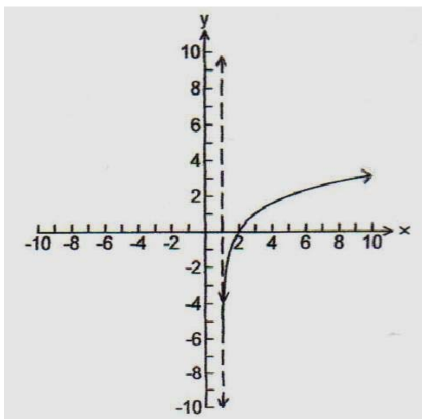
1) a)



b)



c)



2) a) $\{4\}$ b) $\{-1,7\}$ c) $\left\{\dfrac{\log 3}{\log 8}\right\}$ d) $\left\{\dfrac{-\log 5-2\log 6}{2\log 5-\log 6}\right\}$ e) $\{-2\}$ f) $\{6\}$

3) a) 3 b) -2 c) $\dfrac{1}{2}$ d) 3 e) 10 f) 2

4) $\dfrac{1}{2}\log a-6\log c-\dfrac{1}{5}\log b$

5) $\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}}{y^2}\right)$

6) a) $D=(0,\infty)$; $x=0$
b) $D=(-5,\infty)$; $x=-5$

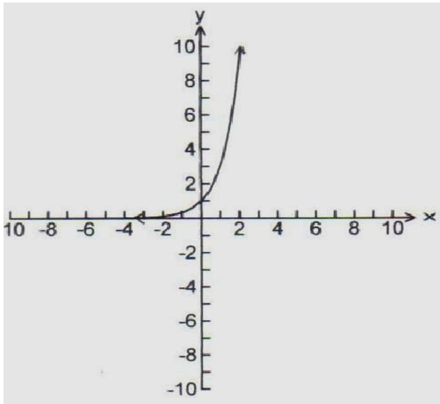
7) a) $f^{-1}(x)=\ln x$
b) $g^{-1}(x)=4^x-5$

8) a) aproxoximadamente 327 millones
b) aproxoximadamente 45 años

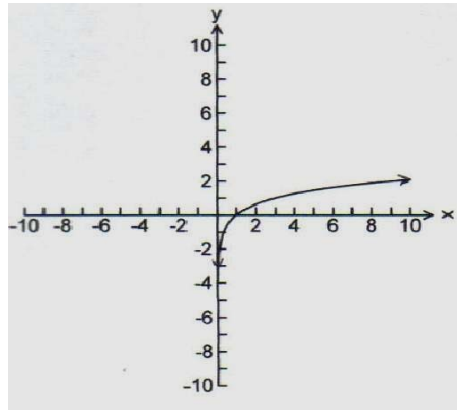
RESPUESTAS DE LA POS-PRUEBA:

1) a) 5 b) 1 c) 0 d) 3 e) $\frac{2}{3}$

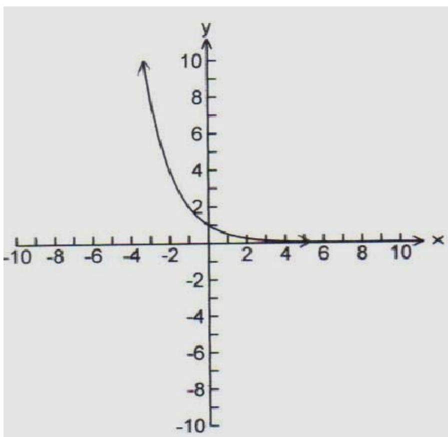
2) a)



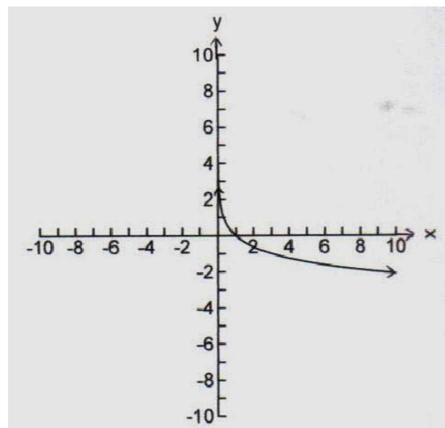
c)



b)



d)



3) a) $D = (0, \infty)$; $x = 0$ b) $D = (4, \infty)$; $x = 4$

4) a) $f^{-1}(x) = \log_5 x$ b) $g^{-1}(x) = 6^x$ c) $k^{-1}(x) = e^x + 2$

5) $\frac{1}{3}\log z - \log x - 2\log y$

6) $\log_3 \frac{4x(x-1)}{y^2}$

7) 2

8) a) 7 d) $\frac{\log 3}{2\log 3 + \log 4}$

b) -4 e) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{\log 7}{\log 2}$ f) 2

9) 12.5 gramos 10) 17.3 años