TALLER 9:
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

(para maestros de décimo a duodécimo grado)

Universidad de Puerto Rico en Bayamón

Departamento de Matemáticas

Preparado por:

Prof. José La Luz, Ph.D.

PRE-PRUEBA

1) Determine si los siguientes ángulos son coterminales:

a) 110° y 470°

b) 700° y 2,200°

c) 45° y -315°

2) Cambie los siguientes ángulos de grados a radianes:

a) 30^{o}

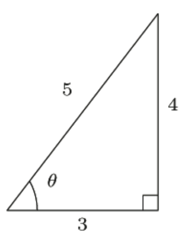
b) 90^{o}

3) Cambie los siguientes ángulos de radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{18}$

b) π

4) Para el siguiente triángulo rectángulo, calcule las 6 funciones trigonométricas:



5) Determine las seis funciones trigonométricas del ángulo formado por el lado terminal del punto (1,3).

6) Encuentre el valor exacto de las siguientes expresiones:

a) *sen* 405°

b) $\cos\frac{20\pi}{3}$

c) $\tan\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$

7) Use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de las siguientes funciones:

a) $\csc\theta = \sqrt{7}, \cot\theta < 0, \tan\theta$

b) $\cot\theta = \sqrt{2}, \sin\theta > 0, \cos\theta$

8) Verifique las siguientes identidades:

a) $\cos\theta\tan\theta = \sin\theta$

b) $\cot\theta\sec\theta\sin\theta = 1$

c) $1 + sen\theta = \dfrac{\cos^2\theta}{1 - sen\theta}$

d) $2\csc 2\theta\tan\theta = \sec^2\theta$

9) Use las fórmulas de medio ángulo para encontrar el valor exacto de las siguientes expresiones:

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

b) $sen 112.5^\circ$

10) Encuentre el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $\cos 2\theta \; si \cos\theta = \dfrac{4}{5}$

b) $sen\, 2\theta$ si $\cos\theta = \dfrac{3}{5}, \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

11) Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $sen\, x = \dfrac{1}{2}, 0 < x < 360^\circ$

b) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$, escriba las contestaciones en radianes

c) $2\cos^2 x + \cos x = 0$, $0 < x < 2\pi$

12) Grafique un periodo de las siguientes funciones:

a) $y = sen\,(2\pi x)$

b) $y = 3\cos(2x)$

13) Resuelva los siguientes triángulos rectángulos dada la siguiente información: (Suponga que a y b representan las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa).

a) $\alpha = 30°$, $a = 10$

b) $\beta = 45°$, $c = 12$

OBJETIVOS

Al finalizar el taller los participantes deberán:

1) dibujar ángulos positivos, negativos y de valores mayores de 360 grados.
2) reconocer cuándo dos ángulos son coterminales.
3) cambiar medidas de ángulos de grados a radianes y viceversa.
4) calcular el área de un segmento circular de un círculo.
5) dado un triángulo rectángulo, calcular las seis funciones trigonométricas del ángulo dado.
6) dado un punto en el plano cartesiano, calcular las seis funciones trigonométricas del ángulo formado.
7) saber utilizar los valores de los ángulos especiales, los ángulos de referencia y los signos de las funciones trigonométricas para hacer cálculos.
8) verificar identidades trigonométricas.
9) usar las fórmulas de suma, medio y doble ángulo para hacer cálculos.
10) resolver ecuaciones trigonométricas.

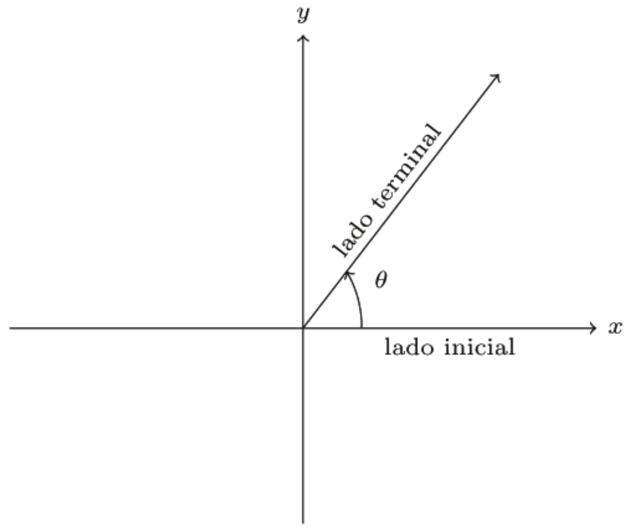
JUSTIFICACIÓN

Desde la agrimensura hasta la navegación y la cartografía, la medida precisa de las distancias es necesaria para nuestro mundo. La trigonometría se desarrolló hace más de dos mil años para este mismo propósito. Este módulo es una introducción a esta rama importante de la matemática.

ÁNGULOS Y SUS MEDIDAS

Recordemos que en geometría, un ángulo está determinado por dos rayos que se intersecan en un punto llamado el vértice.

En trigonometría, el concepto es el mismo. La diferencia es que empezamos con los rayos en el eje de x en plano cartesiano y el vértice coincide con el origen. Para encontrar el ángulo deseado, rotamos uno de los rayos en contra de las manecillas del reloj hasta llegar al ángulo deseado. El rayo en el eje de x se le conoce como lado inicial y el otro rayo se conoce como el lado terminal. Cuando tenemos esto decimos que el ángulo está en posición estandar.



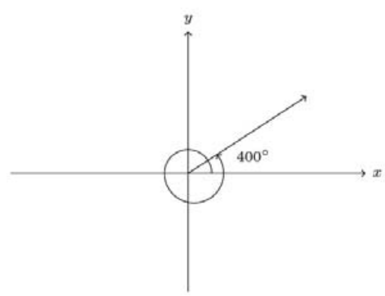
La ventaja de este método es que nos permite generalizar el concepto de ángulo. Ahora, podemos tener ángulos de más de 360° ó de menos de 0°. Lo que ocurre en este caso es que damos una vuelta completa y continuamos.

1. *EJERCICIOS:*

Dibuje los ángulos siguientes:

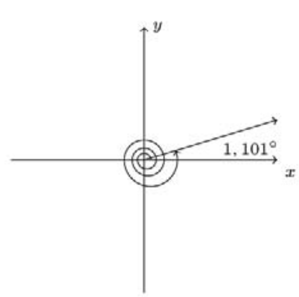
a) 400°

Como 400° = 360°(1) + 40°, esto quiere decir que damos una vuelta entera y después 40° más.



b) 1,101°

Como 1,101° = 360°(3) + 21°, esto quiere decir que damos tres vueltas enteras y después 21° más.



2. *EJERCICIOS:*

Dibuje los ángulos siguientes:

a) 556°

b) 820°

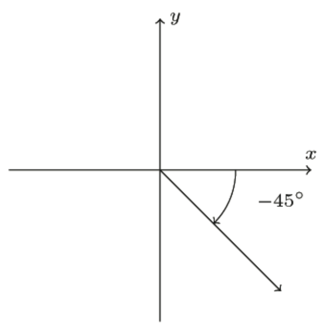
c) 2,130°

También tenemos ángulos negativos (ó de menos de 0°). Esto quiere decir que movemos el rayo a favor de las manecillas del reloj.

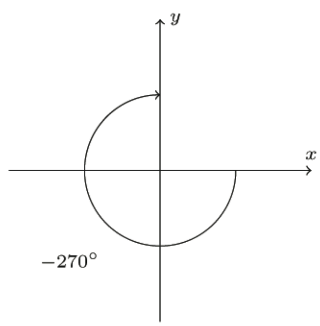
EJEMPLOS:

Dibuje los ángulos siguientes:

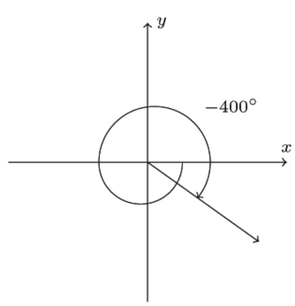
a) -45°



b) -270°



c) -400°



Anteriormente habíamos calculado que 400° = 360°(1) + 40°. Esta vez es el mismo ángulo, pero negativo. Esto quiere decir que damos una vuelta completa a favor de las manecillas del reloj y después 40° más (a favor de las manecillas del reloj).

3. *EJERCICIOS:*

Dibuje los ángulos siguientes:

a) -90°

b) -800°

c) -960°

NOTA: Tenemos una cantidad infinita de ángulos con lados terminales que coinciden.

DEFINICIÓN: Dos ángulos son coterminales si los lados terminales coinciden.

EJEMPLOS:

Determine si los siguientes ángulos son coterminales:

a) 110° y 470°

Observe que 470° = 360°(1) + 110°. De esto deducimos que tenemos una vuelta y después 110°. Por lo tanto estos, ángulos son coterminales.

b) 700° y 2,200°

Como 700° = 360°(1) +340°, el primer ángulo lleva a cabo una vuelta y después 340° y como 2,200° = 360°(6) + 40° el segundo ángulo lleva a cabo seis vueltas y después 40°, los ángulos no son coterminales.

c) 45° y -315°

Como -315° + 360° = 45°, entonces los ángulos son coterminales.

4. *EJERCICIOS:*

Determine si los siguientes ángulos son coterminales:

a) 180° y -180°

b) 1,000 y 2,121°

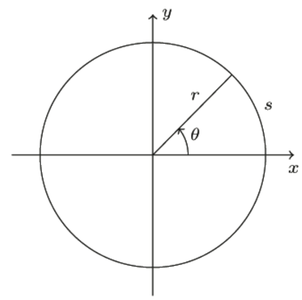
c) 1,440 y 3,960°

NOTA: En trigonometría, con frecuencia, los ángulos se denotan con letras griegas ó caracteres latinos en mayúscula y los lados con caracteres latinos en minúscula.

Además de los grados, tenemos una segunda forma de medir ángulos. Para esto, dibujamos un círculo de radio *r* con centro en el origen y notamos que cualquier ángulo corta un arco de distancia *s* en ese círculo.

DEFINICIÓN: Sea *s* el arco del círculo de radio *r* determinado por el ángulo θ. Entonces la medida en radianes del ángulo θ está dada por la siguiente formula:

$$\theta = \frac{s}{r}$$



NOTA: La medida de un ángulo en radianes es independiente del círculo que usamos para calcularlo.

Recordemos que podemos calcular la circunferencia de un círculo de radio *r* por la fórmula $C=2\pi r$. Para cambiar de grados a radianes, sólo tenemos que recordar que en un círculo de radio *r*, el ángulo 360^{o} corresponde en radianes a $360^{o} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Por lo tanto, multiplicamos el ángulo por $\frac{2\pi}{360^{o}} = \frac{\pi}{180^{o}}$. De esto podemos deducir que $1^{o} = \frac{\pi}{180}$ radianes.

EJEMPLOS:

Cambie los siguientes ángulos de grados a radianes:

a) 30^{o}

$$30^{o}\left(\frac{\pi}{180^{o}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

b) 90^{o}

$$90^{\circ}\left(\frac{\pi}{180^{\circ}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

c) 15^{o}

$$15^{o}\left(\frac{\pi}{180^{o}}\right)=\frac{\pi}{12}$$

5. *EJERCICIOS:*

Cambie los siguientes ángulos de grados a radianes:

a) 45^{o}

b) 180^{o}

c) 270^{o}

d) π^{o}

Para cambiar de radianes a grados, multiplicamos el ángulo por $\frac{180^{o}}{\pi}$.

EJEMPLOS:

Cambie los siguientes ángulos de radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{18}$

$$\frac{\pi}{18}\left(\frac{180^{o}}{\pi}\right)=10^{o}$$

b) π

$$\pi\left(\frac{180^{o}}{\pi}\right)=180^{o}$$

6. *EJERCICIOS:*

Cambie los siguientes ángulos de radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{30}$

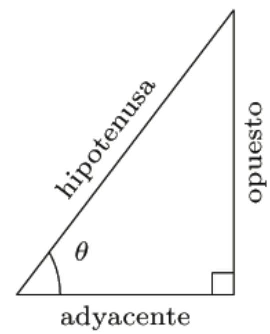
b) $\frac{\pi}{5}$

c) $\dfrac{7\pi}{6}$

d) 9

TRIGONOMETRÍA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo rectángulo es un triángulo donde uno de los ángulos mide 90°. A los lados opuestos a los ángulos que miden menos de 90° se les conocen como los catetos y el lado opuesto al ángulo de 90° se le conoce como la hipotenusa. Dado un triángulo rectángulo y un ángulo agudo θ en ese triángulo, definimos seis funciones de ese ángulo. Llamamos a estas razones trigonométricas.



$$sen\theta = \frac{opuesto}{hipotenusa} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{opuesto}$$

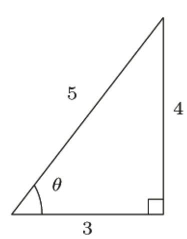
$$\cos\theta = \frac{adyacente}{hipotenusa} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{adyacente}$$

$$\tan\theta = \frac{opuesto}{adyacente} \qquad \cot\theta = \frac{adyacente}{opuesto}$$

EJEMPLOS:

Para los siguentes triángulos rectángulos calcule las 6 razones trigonométricas de θ:

a)

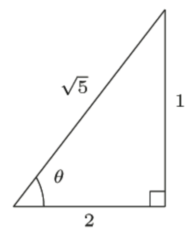


$$sen\theta = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

b)



$$sen\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

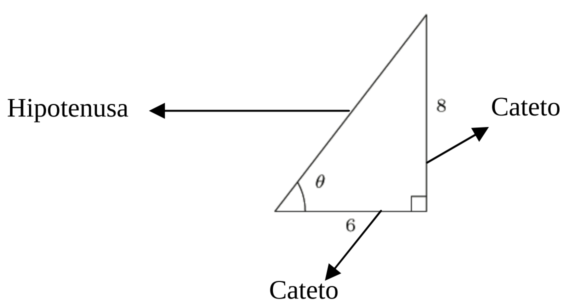
$$\tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\csc\theta = \sqrt{5}$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot\theta = 2$$

c)



Como este es un triángulo rectángulo, podemos usar el Teorema de Pitágoras para calcular el lado que nos falta. El Teorema de Pitágoras nos dice que en un triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En este caso tenemos $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Usamos esto para calcular las razones trigonométricas.

$$sen\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{8}{6} = \frac{3}{4}$$

NOTA: Observe que los valores del seno, el coseno y la tangente son recíprocos a los valores de la cosecante, la secante y la cotangente.

7. *EJERCICIOS:*

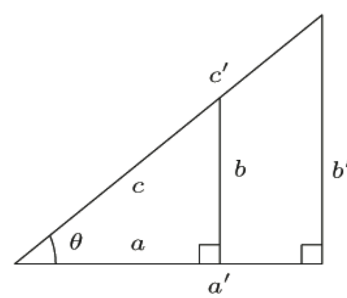
Para los siguentes triángulos rectángulos, en donde los catetos se denotan por a y b y la hipotenusa por c, calcule las 6 razones trigonométricas:

a) $a = 3$, $b = 5$

b) $a = 1$, $c = 4$

c) $a = 2$, $b = 7$

NOTA: Los valores de las razones trigonométricas de θ son independientes del triángulo que usemos para definirlas. Por ejemplo, si usamos el triángulo pequeño de la figura tenemos que $\sin\theta = \frac{b}{c}$ y si usamos el triángulo grande entonces $\sin\theta = \frac{b'}{c'}$, pero como los dos triángulos son semejantes, tenemos que $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$. Lo mismo para las otras funciones.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES

En general, es difícil saber el valor de las razones trigonométricas para un ángulo. Pero para ciertos ángulos, llamados ángulos especiales, podemos saber el valor exacto.

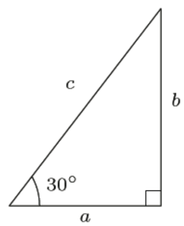
1. 45°

Si θ = 45° entonces β = 45°. Esto nos dice que *a* = *b*. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Entonces tenemos:

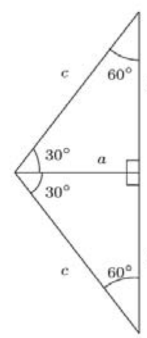
$$sen45^{o} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 45^{o} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^{o} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45^{o} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^{o} = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45^{o} = \frac{a}{a} = 1$$



2. 30°



Si θ = 30° entonces adjuntamos otro triángulo igual y obtenemos un triángulo equilátero donde cada ángulo mide 60°. Tenemos entonces que *c = 2b.* Usando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$(2b)^2 = a^2 + b^2$$
$$4b^2 = a^2 + b^2$$
$$3b^2 = a^2$$
$$b\sqrt{3} = a$$

Entonces tenemos:

$$sen30^{o} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2} \qquad \csc 30^{o} = \frac{2b}{b} = 2$$

$$\cos 30^{o} = \frac{b\sqrt{3}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30^{o} = \frac{2b}{b\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 30^{o} = \frac{b}{b\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30^{o} = \frac{b\sqrt{3}}{b} = \sqrt{3}$$

3. 60°

Si $\theta = 60°$, por el mismo procedimiento del caso anterior, tenemos

$$sen 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60^{o} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^{o} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^{o} = 2$$

$$\tan 60^{o} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

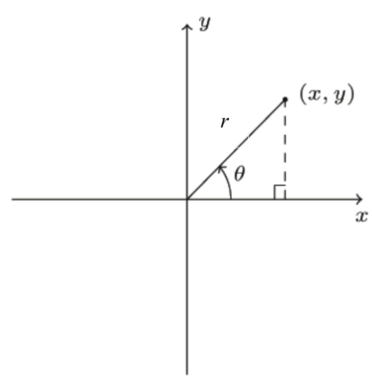
Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

grados	30°	45°	60°
radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
senθ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosθ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tanθ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cscθ	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
secθ	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cotθ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO

Volviendo al plano cartesiano, sea (x, y) un punto en el primer cuadrante. Observe que este punto determina el lado terminal de un ángulo y con esto podemos formar un triángulo rectángulo en el plano.



Si $r=\sqrt{x^2+y^2}$ las razones trigonométricas se convierten en:

$$sen\theta=\frac{y}{r} \qquad \csc\theta=\frac{r}{y}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \sec\theta=\frac{r}{x}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \cot\theta=\frac{x}{y}$$

EJEMPLOS:

a) Determine las seis funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto (1, 2).

Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que $r=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. Con esto podemos calcular las razones trigonométricas:

$$sen\theta=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \csc\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta=\sqrt{5}$$

$$\tan\theta=3 \qquad \cot\theta=\frac{1}{3}$$

b) Si $x=4$, $r=5$, halla las 6 razones trigonométricas

Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$5^2=4^2+y^2$$
$$25=16+y^2$$
$$25-16=y^2$$
$$9=y^2$$
$$3=y$$

Con esto podemos calcular las funciones trigonométricas:

$$sen\theta=\frac{3}{5} \qquad \csc\theta=\frac{5}{3}$$

$$\cos\theta=\frac{4}{5} \qquad \sec\theta=\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta=\frac{3}{4} \qquad \cot\theta=\frac{4}{3}$$

8. *EJERCICIOS:*

Determine las seis razones trigonométricas del ángulo con la información dada:

a) el lado terminal del ángulo pasa por el punto (4, 6).

b) y = 2, r = 6

Si el punto está en cualquier otro cuadrante, el procedimiento es el mismo excepto que tenemos que tener cuidado con los signos. Recuerde que como r es una distancia, siempre es positiva.

EJEMPLOS:

Determine las seis razones trigonométricas del ángulo generado por el lado terminal del punto dado:

a) (-8, -6)

Usando el Teorema de Pitágoras encontramos que r = 10. Entonces:

$$sen\theta = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \csc\theta = -\frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5} \qquad \sec\theta = -\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \qquad \cot\theta = \frac{4}{3}$$

b) El ángulo θ está en el cuarto cuadrante, x =1, r = $\sqrt{5}$

Debido a que θ está en el cuarto cuadrante, y < 0. Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que y = -2. Entonces

$$sen\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \csc\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = \sqrt{5}$$

$$\tan\theta = -2 \qquad \cot\theta = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

9. *EJERCICIOS*:

Determine las seis razones trigonométricas del ángulo θ dada la siguiente información:

a) el lado terminal del ángulo θ se encuentra en el segundo cuadrante, y = 2, r = 5

b) el lado terminal del ángulo θ pasa por el punto (1, 0)

c) el lado terminal del ángulo θ pasa por el punto (0, 1)

d) el lado terminal del ángulo θ pasa por el punto (-1, 0)

e) el lado terminal del ángulo θ pasa por el punto (0, -1)

NOTA: El ejercicio anterior nos permite calcular las razones trigonométricas de algunos ángulos adicionales. El punto (1, 0) corresponde a 0°, (0, 1) a 90°, (-1, 0) a 180° y (0, -1) a 270°. Añadiendo estos valores a la tabla anterior tenemos (el valor n.d. significa no definido):

grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0	n.d.
$\csc\theta$	n.d.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	n.d.	-1
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	n.d.	-1	n.d.
$\cot\theta$	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	n.d.	0

NOTA: Observe que los valores del seno y el coseno en la tabla siempre están entre -1 y 1. Definiendo las razones trigonométricas usando un círculo de radio uno, podemos deducir que esto es siempre cierto.

Si sabemos el cuadrante en el que ángulo está, podemos deducir el signo de la función trigonométrica.

EJEMPLOS:

Determine el signo de las siguientes razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes del plano cartesiano:

a) $sen\ \theta$

Debido a que $sen\,\theta = \frac{y}{r}$ y que r siempre es positivo, es suficiente saber el signo de y en cada cuadrante. En el primer y segundo cuadrante $y > 0$, en el tercero y el cuarto $y < 0$. Por lo tanto, $sen\,\theta > 0$ en el primer y segundo cuadrante y $sen\theta < 0$ en el tercer y cuarto cuadrante.

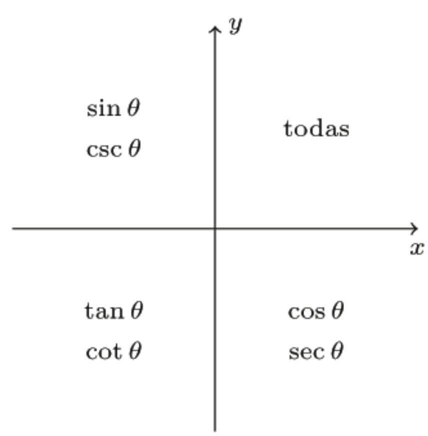
b) $\tan\theta$

Debido a que $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $\tan\theta$ es positivo si $x > 0$ y $y > 0$ ó $x < 0$ y $y < 0$. Esto ocurre en el primer y el tercer cuadrante. Por lo tanto $\tan\theta > 0$ en el primer y el cuarto cuadrante y $\tan\theta < 0$ en el segundo y el cuarto cuadrante.

10. *EJERCICIOS:*

Determine el signo de las otras razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes del plano cartesiano.

Colocando los cuadrantes donde cada función trigonométrica es positiva tenemos:



EJEMPLO:

Usando la información provista, determine el valor de las 5 razones restantes:

a) $cot\ \theta = -3,\ sen\ \theta < 0$

Como *cot* $\theta < 0$ en el segundo y el cuarto cuadrante y *sen* $\theta < 0$ en el tercero y el cuarto cuadrante, entonces θ está en el cuarto cuadrante. Esto nos dice que $x > 0$ y $y < 0$. Como $\cot\theta = \frac{x}{y}$, podemos tomar $x = 3$, $y = -1$. Con esto tenemos que $r = \sqrt{10}$. Con esto tenemos:

$$sen\theta = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{5} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{10}}{-1} = -\sqrt{10}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \qquad \cot\theta = -3$$

11. *EJERCICIOS:*

Usando la información provista, determine el valor de la función requerida:

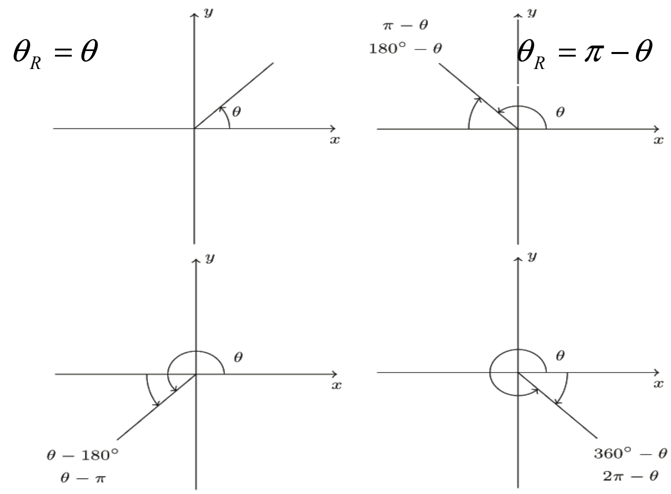
a) $sen\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\theta < 0$, $\tan\theta$

b) $\csc\theta = -5$, $\tan\theta > 0$, $\cos\theta$

c) $\sec\theta = -\sqrt{11}$, $\sin\theta > 0$, $sen\theta$

DEFINICIÓN: El ángulo de referencia de θ es el ángulo positivo agudo formado por el eje de x y el lado terminal de θ.

Los siguientes diagramas nos muestran cómo calcular el ángulo de referencia.



$\theta_R = \theta - \pi$ $\qquad$ $2\pi - \theta = \theta_R$

TEOREMA 1: La evaluación de cualquier razón trigonométrica del ángulo de referencia del ángulo θ es igual a la evaluación de la razón trigonométrica del ángulo θ, excepto por el signo, el cual puede ser positivo o negativo.

EJEMPLOS:

Use el ángulo de referencia y el signo de las razones trigonométricas en los cuadrantes para encontrar el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas:

a) *sen* 120°

El lado terminal del ángulo 120° está en el segundo cuadrante, usamos la formula $180^{o} - \theta$ (debido a que el ángulo está en grados, usamos la fórmula en grados). Como el seno es positivo en el segundo cuadrante tenemos:

$$sen120^{o} = sen(180^{o} - 120^{o}) = sen60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\cos\frac{4\pi}{3}$

Como $\frac{4\pi}{3}$ está en el tercer cuadrante, usamos la formula $\theta - \pi$ (debido a que el ángulo está en radianes, usamos la fórmula en radianes). Como el coseno es negativo en el tercer cuadrante tenemos:

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

12. *EJERCICIOS:*

Use el ángulo de referencia y el signo de las razones trigonométricas en los cuadrantes para encontrar el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas:

a) tan 300°

b) $\csc\frac{11\pi}{6}$

c) $\cos\frac{3\pi}{4}$

TEOREMA 2: Los valores de las razones trigonométricas de ángulos coterminales son iguales.

EJEMPLOS:

Use el ángulo de referencia, el signo de las razones trigonométricas en los cuadrantes y los ángulos coterminales para encontrar el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas:

a) sen 405°

Como 405°=360°+45°, tenemos que $sen 405^{o} = sen(360^{o} + 45^{o}) = sen 45^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cos\frac{20\pi}{3}$

Como $\frac{20\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3} = 3(2\pi) + \frac{2\pi}{3}$ tenemos que $\cos\frac{20\pi}{3} = \cos\left(3(2\pi) + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$.

Entonces:

$$\cos\frac{20\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

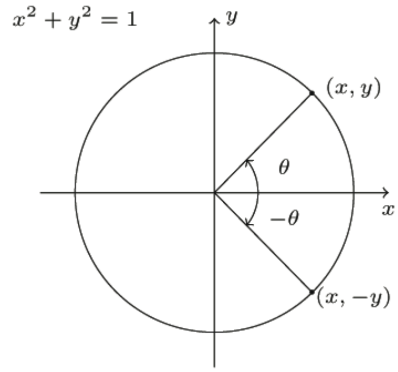
13. *EJERCICIOS:*

Use el ángulo de referencia, el signo de las razones trigonométricas en los cuadrantes y los ángulos coterminales para encontrar el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $\tan 1{,}560^{o}$

b) $\csc\frac{17\pi}{3}$

c) $sen\dfrac{23\pi}{6}$



Sea (*x, y*) un punto en el círculo de radio uno y que se encuentre en el primer cuadrante. Entonces el punto (*x,-y*) también está en el círculo. Entonces *sen* θ = *y, cos* θ = *x.* Viendo el dibujo vemos que *sen* (-θ) = -*y* ó *y*= –*sen* (-θ). Usando esto tenemos que –*sen* (-θ) = y = *sen* (-θ) ó *sen* (-θ) = –*sen* θ. De la misma manera tenemos *cos* (-θ) = *cos* θ. Así mismo tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA3: Para cualquier ángulo θ tenemos:

$$sen(-\theta) = -sen\,\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

EJEMPLOS:

Determine el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas:

a) $sen(-90^{o})$

Usando el teorema anterior tenemos $sen(-90^{o}) = -sen90^{o} = -1.$

b) $\tan\left(-\dfrac{41\pi}{6}\right)$

Combinando todo lo que hemos aprendido tenemos

$$\tan\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = -\tan\frac{41\pi}{6} = -\tan\left(3(2\pi)+\frac{5\pi}{6}\right) = -\tan\frac{5\pi}{6} = -\left[-\tan\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

14. *EJERCICIOS:*

Determine el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas:

a) $\tan(-180^{o})$

b) $\cos(-720^{o})$

c) $\csc\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)$

IDENTIDADES BÁSICAS

DEFINICIÓN: Una identidad es una expresión que es cierta para todos los valores reales. Una identidad trigonométrica es una identidad que involucra las funciones trigonométricas.

EJEMPLOS:

Determine si las siguientes expresiones son identidades:

a) $x^2 > 0$

Observe que aunque para muchos números esta aseveración es cierta, si $x = 0$, la expresión no es cierta, esta expresión no es una identidad.

b) $sen(-\theta) = -sen\theta$

Por el teorema 3, esta expresión es una identidad (trigonométrica).

c) $(-x)^2 = x^2$

Esto siempre es cierto. Por lo tanto, es una identidad.

En esta sección derivaremos algunas de las identidades trigonométricas básicas. De las definiciones de las funciones trigonométricas tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} & \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} & \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{array}}$$

Derivamos las identidades pitagóricas. Empezamos con $x^2 + y^2 = r^2$ y dividiendo por r^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$$

Escribimos $\cos^2\theta$ por $(\cos\theta)^2$ y lo mismo para $(\operatorname{sen}\theta)^2$. Obtenemos

$$\boxed{\cos^2\theta+\mathrm{s}e\mathrm{n}^2\theta=1}$$

Dividendo la ecuación $x^2+y^2=r^2$ entre y^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{y^2}=\frac{r^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=\left(\frac{r}{y}\right)^2$$

$$(\cot\theta)^2+1=(\csc\theta)^2$$

$$\boxed{\cot^2\theta+1=\csc^2\theta}$$

Por último, dividiendo la ecuación $x^2+y^2=r^2$ entre x^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}$$

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{r}{x}\right)^2$$

$$1+(\tan\theta)^2=(\sec\theta)^2$$

$$\boxed{1+\tan^2\theta=\sec^2\theta}$$

NOTA: A estas tres identidades se les conoce como las identidades pitagóricas.

SUGERENCIAS PARA VERIFICAR IDENTIDADES:

1) Trabajar con el lado más complicado de la ecuación.

2) Reescribir todas las funciones trigonométricas en términos de senos y cosenos.

3) Utilizar las identidades básicas para obtener una expresión más sencilla.

4) Cuando se trabaja con expresiones con cocientes, observar si se pueden cancelar términos.

EJEMPLOS:

Use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de las siguientes raozones:

a) $\cos\theta$, si $\sec\theta=5$

Como $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, entonces

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$
$$= \frac{1}{5}$$

b) $\cos\theta$, si $\cot\theta = \sqrt{15}$, $sen\theta = \dfrac{1}{4}$

Como $\dfrac{\cos\theta}{sen\theta} = \cot\theta$ entonces

$$\frac{\cos\theta}{sen\theta} = \cot\theta$$
$$\cos\theta = \cot\theta\, sen\theta$$
$$= \left(\sqrt{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{15}}{4}$$

c) $\tan\theta$, si $\csc\theta = \sqrt{7}, \cot\theta < 0$,

Como $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ entonces tenemos:

$$\cot^2\theta + 1 = \left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$\cot^2\theta + 1 = 7$$
$$\cot^2\theta = 6$$
$$\cot\theta = \pm\sqrt{6}$$

Pero $\cot\theta < 0$, así que $\cot\theta = -\sqrt{6}$. Como $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$, entonces tenemos $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} = \dfrac{1}{-\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

15. *EJERCICIOS*:

Use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de las siguientes razones:

a) $sen\theta$, $si \csc\theta = \sqrt{3}$

b) $\cos\theta$, si $\tan\theta = \sqrt{5}$ y $sen\theta = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$

c) $\tan\theta$, si $\cos\theta = \frac{1}{3}, \cot\theta < 0$

VERIFICACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades se verifican empezando en un lado de la ecuación y realizando operaciones para llegar al otro lado. No existen reglas para verificar las identidades. Pero hay unas sugerencias para hacer estas verificaciones más fáciles. Usualmente, es mejor empezar con el lado más complicado de la ecuación. Veamos los siguientes ejercicios.

EJEMPLOS:

Verifique las siguientes identidades:

a) $\cos\theta\tan\theta = sen\theta$

Empezaremos con el lado izquierdo de la ecuación. Observe que el lado izquierdo de esta ecuación contiene una tangente y en el lado derecho sólo aparece un seno. Usamos una de las identidades de la tangente para reescribirla en términos de seno y coseno. Tenemos

$$\begin{aligned}
\cos\theta\tan\theta &= sen\theta \\
\cos\theta\frac{sen\theta}{\cos\theta} &= sen\theta \\
sen\theta &= sen\theta
\end{aligned}$$

b) $\cot\theta\sec\theta\, sen\theta = 1$

Otra vez, empezaremos con el lado izquierdo de la ecuación. Reescribimos la cotangente y la secante en términos de seno y coseno.

$$\begin{aligned}
\cot\theta\sec\theta\, sen\theta &= 1 \\
\left(\frac{\cos\theta}{sen\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)sen\theta &= 1 \\
\left(\frac{\cos\theta\, sen\theta}{sen\theta\cos\theta}\right) &= 1 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

c) $1+\sin\theta = \frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

Esta vez comenzamos con el lado derecho. Observe que en el numerador aparece $\cos^2\theta$ y en el denominador una expresión con seno. Usamos la identidad trigonométrica $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. Entonces $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$. Usando esto tenemos:

$$
\begin{aligned}
1+sen\theta &= \frac{\cos^2\theta}{1-sen\theta}\\
1+sen\theta &= \frac{1-sen^2\theta}{1-sen\theta}\\
1+sen\theta &= \frac{(1-sen\theta)(1+sen\theta)}{1-sen\theta}\\
1+sen\theta &= 1+sen\theta
\end{aligned}
$$

16. *EJERCICIOS:*

Verifique las siguientes identidades trigonométricas:

a) $sen\theta\cot\theta=\cos\theta$

b) $\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta}=\cot\theta$

c) $\dfrac{sen\theta+\tan\theta}{\csc\theta+\cot\theta}=sen\theta\tan\theta$

d) $\dfrac{\cot\theta-\tan\theta}{sen\theta\cos\theta}=\csc^2\theta-\sec^2\theta$

IDENTIDADES DE SUMA Y DOBLE ÁNGULO

Observe que $sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=sen\pi=0$ y sin embargo $sen\dfrac{\pi}{2}+sen\dfrac{\pi}{2}=1+1=2$. Esto nos dice que las razones trigonométricas no respetan la suma. Sin embargo, hay fórmulas para la suma.

$$
\begin{aligned}
sen(\alpha+\beta) &= sen\alpha\cos\beta+sen\beta\cos\alpha\\
sen(\alpha-\beta) &= sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-sen\beta sen\alpha\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+sen\beta sen\alpha
\end{aligned}
$$

EJEMPLOS:

Encuentre el valor exacto de la siguiente expresión:

a) $sen\,105°$

Observe que aunque 105° no está en la tabla, 105°=60°+45°. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
sen105^{o} &= sen(60^{o}+45^{o})\\
&= sen60^{o}\cos 45^{o} + sen45^{o}\cos 60^{o}\\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Observe que el valor $\frac{\pi}{12}$ no es un ángulo especial. Sin embargo, $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ y estos dos valores si están en la tabla. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+sen\frac{\pi}{4}sen\frac{\pi}{3}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

17. *EJERCICIOS:*

Encuentre el valor exacto de la siguientes expresiones:

a) $sen\frac{\pi}{12}$

b) $sen\frac{7\pi}{12}$

c) $\cos\frac{7\pi}{12}$

d) $sen\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

18. *EJERCICIOS*:

Use las fórmulas de suma de ángulos de para verificar las siguientes identidades

a) $\dfrac{sen(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$

b) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2sen\alpha\cos\beta$

Trabajamos ahora con el caso especial en que $\alpha=\beta$. Usando la fórmula de la suma del seno tenemos:

$$\begin{aligned} sen\,2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha) \\ &= sen\alpha\cos\alpha + sen\alpha\cos\alpha \\ &= 2sen\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

En el caso de la suma de cosenos tenemos:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) \\ &= \cos\alpha\cos\alpha - sen\alpha sen\alpha \\ &= \cos^2\alpha - sen^2\alpha \end{aligned}$$

Usando la identidad pitagórica $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ tenemos:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^2\alpha-1 \\ &= (1-sen^2\alpha)-sen^2\alpha \\ &= 1-2sen^2\alpha \end{aligned}$$

Resumiendo, las fórmulas de doble ángulo son:

$$sen\,2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - sen^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha-1 \\ &= 1-2sen^2\alpha \end{aligned}$$

EJEMPLOS:

Encuentre el valor de las siguientes razones trigonométricas:

a) $\cos 2\theta$, si $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

Usando la fórmula de doble ángulo de coseno tenemos:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1$$
$$= 2\left(\frac{16}{25}\right) - 1$$
$$= \frac{32}{25} - 1$$
$$= \frac{7}{25}$$

b) $sen2\theta, \cos\theta = \frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

Si usamos la fórmula de doble ángulo del seno, nos damos cuenta que necesitamos el seno de este ángulo. Esto lo hacemos de la misma manera que lo hicimos anteriormente.

$$sen\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$
$$= \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$= \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$
$$= \pm\frac{4}{5}$$

Como el ángulo está en el cuarto cuadrante tenemos que $sen\theta = -\frac{4}{5}$. Entonces

$$sen2\theta = 2sen\theta\cos\theta$$
$$= 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$= -\frac{24}{25}$$

19. *EJERCICIOS*:

Encuentre el valor $sen2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ si:

a) $\cos\theta = \dfrac{7}{25}, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

b) $\tan\theta = -4, \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

c) $sen\theta = \dfrac{3}{4}, \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

20. *EJERCICIOS*:

Use las identidades de doble ángulo para verificar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta} = \cos 2\theta$

b) $2\csc 2\theta \tan\theta = \sec^2\theta$

IDENTIDADES DE MEDIO ÁNGULO

Podemos usar las identidades de doble ángulo de coseno para deducir las fórmulas de medio ángulo.

$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta - 1 &= \cos 2\theta \\ 2\cos^2\theta &= 1+\cos 2\theta \\ \cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} \\ \cos\theta &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 1-2\sin^2\theta \\ 2\sin^2\theta &= 1-\cos 2\theta \\ \sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ \sin\theta &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \end{aligned}$$

Hacemos la sustitución $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ y obtenemos:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

NOTA: El signo de la identidad lo decide el cuadrante en el que el lado terminal de $\dfrac{\alpha}{2}$ descansa.

EJEMPLOS:

Encuentre el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $sen\dfrac{\pi}{24}$

Observe que $\dfrac{\pi}{24}=\dfrac{\frac{\pi}{12}}{2}$ y que en el ejercicio 17 (a) calculamos $\cos\dfrac{\pi}{12}$. Observando que este ángulo está en el primer cuadrante tenemos:

$$sen\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{4-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$$

$$=\frac{\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{4}$$

b) $\cos 105^{o}$

Observe que $105^{o}=\dfrac{210^{o}}{2}$ y $\cos 210^{\circ}=-\cos(210^{\circ}-180^{\circ})=-\cos 30^{\circ}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces

$$\cos 105^{o}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

21. *EJERCICIOS:*

Encuentre el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $sen\frac{\pi}{8}$

b) $\cos 105^{\circ}$

c) $sen 165^{\circ}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN: Una ecuación trigonométrica es una ecuación que involucra las razones trigonométricas.

En esta sección discutiremos técnicas para resolver ecuaciones trigonométricas. Hay que observar las condiciones que se requieren de la solución.

TEOREMA 4: Si θ es el ángulo de referencia de un ángulo entonces:

1) θ es el ángulo en el primer cuadrante

2) 180° - θ es el ángulo en el segundo cuadrante del cual θ es el ángulo de referencia (π - θ en radianes)

3) 180° + θ es el ángulo en el tercer cuadrante del cual θ es el ángulo de referencia ($\pi + \theta$ en radianes)

4) 360° - θ es el ángulo en el cuarto cuadrante del cual θ es el ángulo de referencia ($2\pi - \theta$ en radianes)

EJEMPLOS:

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas (las contestaciones deben estar expresadas en grados):

a) $sen\, x = \frac{1}{2}, 0 < x < 360^{\circ}$

El problema requiere que encontremos todos los valores de x que se encuentran entre 0° y 360°. Sabemos que cuando x = 30° la ecuación es cierta. Pero no podemos olvidar que el seno vuelve a obtener el valor $\frac{1}{2}$ en el segundo cuadrante. Siendo 30° el ángulo de referencia de un ángulo en el segundo cuadrante, lo encontramos con la fórmula de la parte 2 del teorema 4. Tenemos 180°-30°=150°. Entonces las soluciones son x=30°, 150°.

b) $sen x = \frac{1}{2}$

Observe que aunque la ecuación es igual a la del ejemplo anterior, no hay restricciones para las soluciones. Como todos lo ángulos coterminales producen el mismo valor, todos los múltiplos de 360° son soluciones de la ecuación. Así que las soluciones son:

$$x = 30^\circ + 360^\circ k$$
$$x = 150^\circ + 360^\circ k,$$

donde $k \in$ **Z**. (Z: es el conjunto de los números enteros)

c) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$

Primero, despejamos esta ecuación para cos x.

$$2\cos x + \sqrt{2} = 0$$
$$2\cos x = -\sqrt{2}$$
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Encontramos que 45° es el ángulo de referencia de dos ángulos, uno en el segundo y otro en el tercer cuadrante. Los calculamos con el teorema anterior y tenemos que x = 180° - 45° = 135° y x = 180° + 45° = 225°. Como no hay restricción sobre las soluciones, éstas son:

$$x = 135^\circ + 360^\circ k$$
$$x = 225^\circ + 360^\circ k,$$

donde $k \in$ **Z**.

22. *EJERCICIOS*:

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas (las contestaciones deben estar expresadas en radianes):

a) $senx = -1$

b) $2\cos x - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

c) $\tan^2 x - 3 = 0, 0 < x < 2\pi$

A veces tenemos ecuaciones más complicadas en las que tenemos que factorizar.

EJEMPLOS:

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas (las contestaciones deben estar expresadas en radianes):

a) $2\cos^2 x + \cos x = 0$

Observe que tenemos dos términos que consisten en coseno igualadas a cero. Al igual que una ecuación polinómica, tomamos factor común:

$$2\cos^2 x + \cos x = 0$$
$$\cos x(2 + \cos x) = 0$$

Usamos la propiedad del cero (si $xy = 0$, entonces $x = 0$ ó $y = 0$) y tenemos cos $x = 0$ ó $2 + \cos x = 0$. Resolvemos estas dos ecuaciones. Para la primera ecuación, los valores necesarios aparecen en la tabla. Tenemos que $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Para la segunda ecuación, note que obtenemos cos $x = -2$. Esto no puede ser. Descartamos esta ecuación y tenemos las soluciones $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Al no haber restricción del dominio tenemos que

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$
$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,$$

donde $k \in \mathbf{Z}$.

b) $2sen^2 x - 3senx + 1 = 0$

Observe que, a diferencia del problema anterior, tenemos una ecuación con un término cuadrado, uno lineal y una constante, semejando una ecuación cuadrática. Para simplificar, llevamos a cabo un procedimiento llamado cambio de variables. Sea y = sin *x.* Entonces tenemos que $2sen^2 x - 3senx + 1 = 2y^2 - 3y + 1$. Podemos resolver esta ecuación auxiliar factorizando y obtenemos $2y^2 - 3y + 1 = (2y - 1)(y - 1) = 0$. Entonces

$y=\frac{1}{2}, y=1$. Substituyendo otra vez tenemos $\sin x=\frac{1}{2}$, $\sin x=1$. Resolviendo tenemos $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}$. Al no haber restricción del dominio tenemos que:

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

donde $k\in$ **Z**.

23. *EJERCICIOS:*

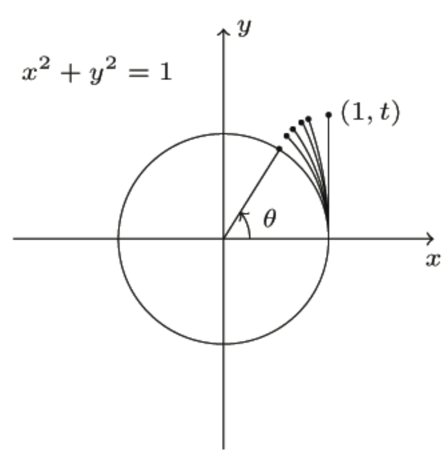
Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas (las contestaciones deben estar expresadas en radianes):

a) $\cos^2 x sen x = sen x, 0 \le x < 2\pi$

b) $sen^2 x - sen x - 6 = 0$

c) $\cos x + 2\sec x = -3$ (reescriba el segundo término en términos de coseno y simplifique)

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS GRÁFICAS



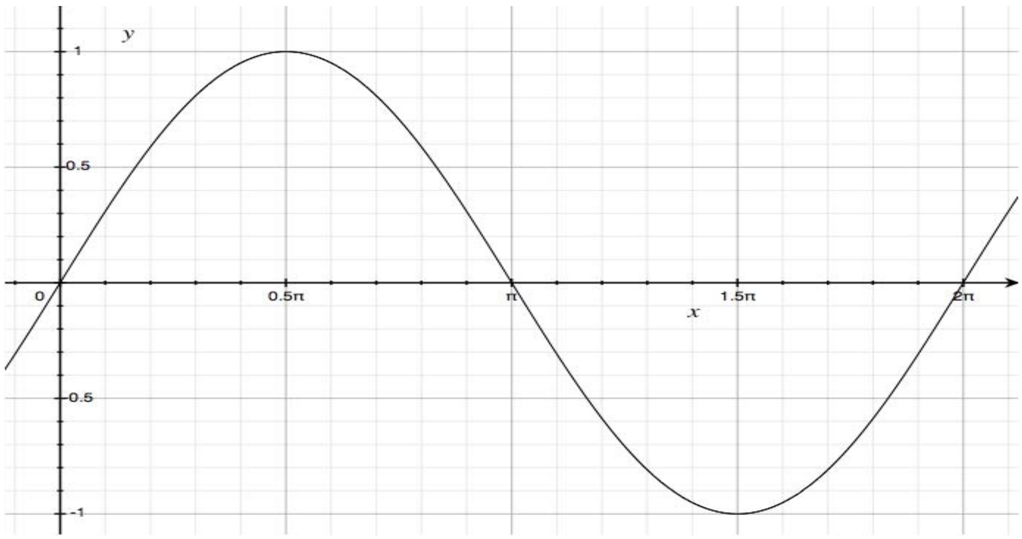
Deseamos definir las funciones trigonométricas para los números reales. Sea $t\in$ **R**, $t > 0$. En el punto (1,0) del círculo unitario colocamos un segmento de recta vertical de tamaño t en el primer cuadrante. Luego enrollamos el segmento de recta en el círculo. Eso define un punto en el círculo y un ángulo θ. Este ángulo, en radianes, es $\theta=\frac{t}{1}=t$. De igual manera con las otras funciones trigonométricas. Si $t < 0$ hacemos lo mismo pero en el cuarto cuadrante. Definimos *f(t)* $= sen t = sen\theta$. De la misma manera definimos las otras funciones trigonométricas. Discutiremos primeros la funciones seno y coseno.

DEFINICIÓN: Decimos que la función *f* es periódica si existe un número real $p > 0$ tal que

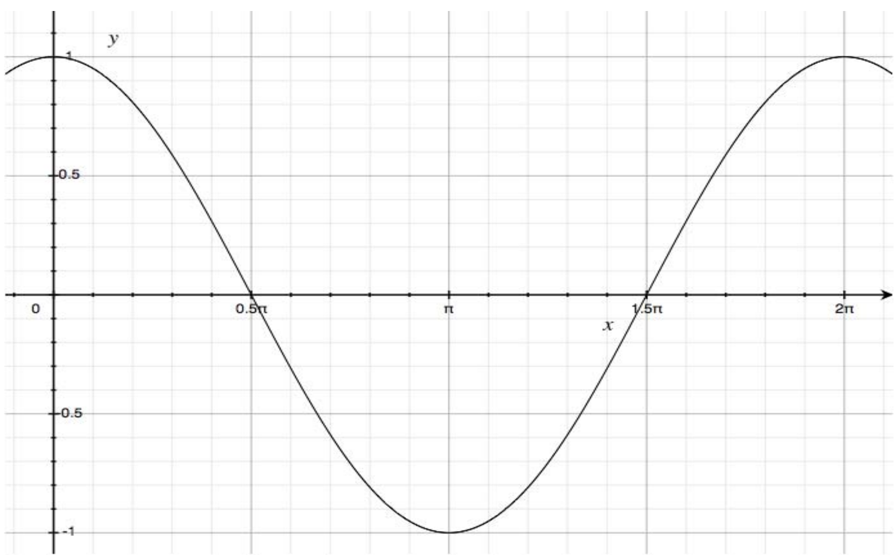
$$f(x + p) = f(x)$$

para todas las x. Si f es una función periódica y $p>0$ es el número más pequeño tal que $f(x + p) = f(x)$, decimos que p es el periodo de f.

Por lo discutido anteriormente, las funciones $y = sin\ x$, $y = cos\ x$ tienen periodo 2π. El dominio de las funciones seno y coseno es **R** y el campo de valores es [-1,1]. Veamos un periodo, de 0 a 2π, de la gráfica de la función seno.



Veamos ahora un periodo de la gráfica de la función coseno.



NOTA: Sólo vimos un periodo de la gráfica del seno y del coseno. Al ser funciones periódicas, este periodo se repite indefinidamente.

La forma general de estas funciones son:

$$y = A\ sen(\omega x) \qquad y = A\ cos(\omega x)$$

donde a $|A|$ se le conoce como la amplitud y de ω (omega) obtenemos el periodo por la fórmula $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

PROCEDIMIENTO PARA GRAFICAR UN PERIODO DE LA GRÁFICA DEL SENO:

1) Determinar el periodo P y la amplitud A.

2) Marcar en el eje de x el punto inicial 0 y el punto final P.

3) Marcar en el eje de x los puntos a un cuarto, medio, tres cuartos de P.

4) El primer punto corresponde a $y = 0$, el segundo a $y = A$, el tercero a $y = 0$, el cuarto a $y = -A$, y el último a $y = 0$.

5) Conectar estos punto siguiendo el modelo de la función seno básica.

PROCEDIMIENTO PARA GRAFICAR UN PERIODO DE LA GRÁFICA DEL COSENO:

1) Determinar el periodo P y la amplitud A.

2) Marcar en el eje de x el punto inicial 0 y el punto final P.

3) Marcar en el eje de x los puntos a un cuarto, medio, tres cuartos de P.

4) El primer punto corresponde a $y = 1$, el segundo a $y = 0$, el tercero a $y = -1$, el cuarto a $y = 0$, y el último a $y = 1$.

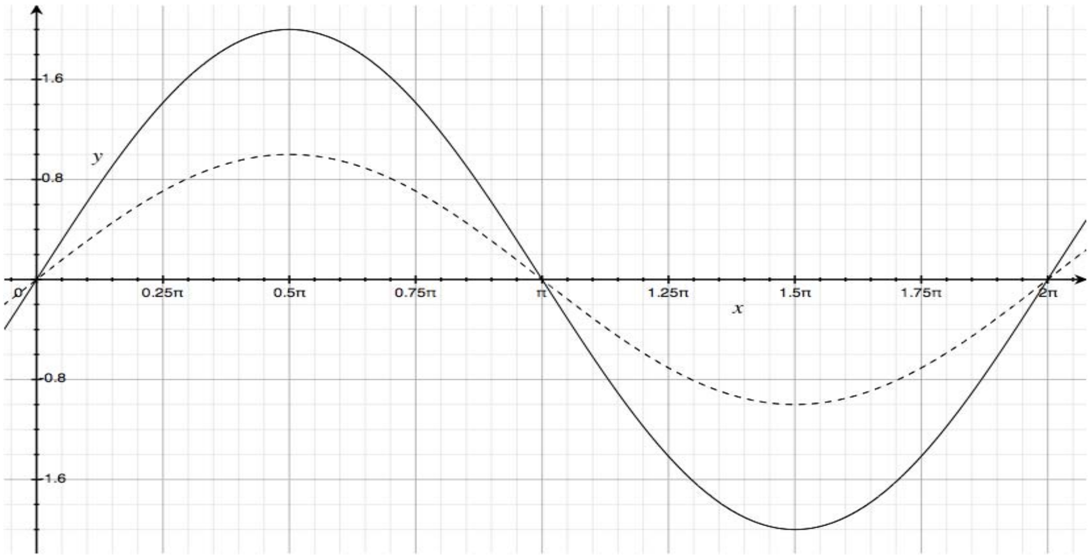
5) Conectar estos punto siguiendo el modelo de la función coseno básica.

EJEMPLOS:

Grafique un periodo de las siguientes funciones:

a) $y = 2\ sin\ x$

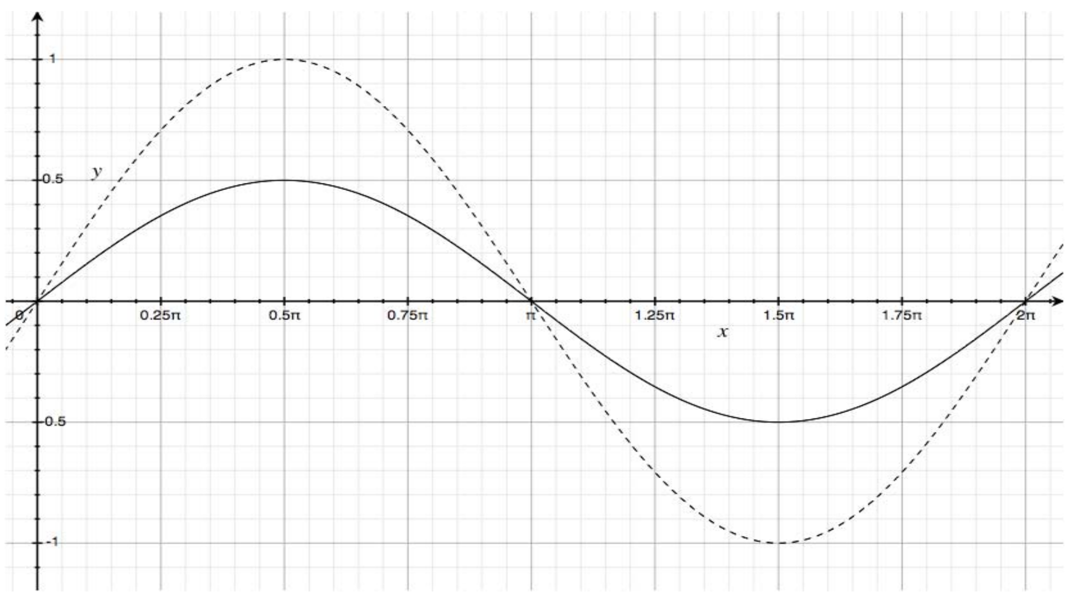
El periodo es 2π ($\omega = 1$) y la amplitud es 2. Dividimos el periodo, $[0, 2\pi]$, en cuatro partes: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.



Se incluyó la gráfica de *sin x* (entrecortado) para propósito de comparación.

b) $y = \frac{1}{2} senx$

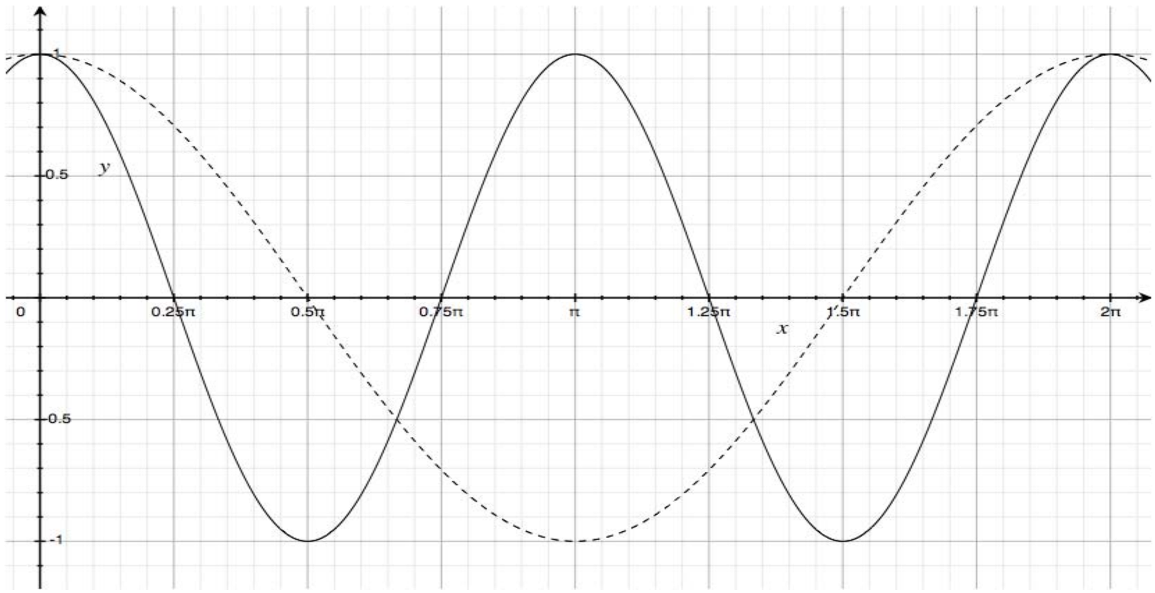
El periodo es 2π ($\omega = 1$) y la amplitud es 2. Dividimos el periodo, $[0, 2\pi]$, en cuatro partes: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$



Se incluyó la gráfica de *sin x* (entrecortado) y para propósito de comparación.

c) $y = \cos 2x$

El periodo es π y la amplitud es 1. Dividimos el periodo, $[0, \pi]$, en cuatro partes: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$

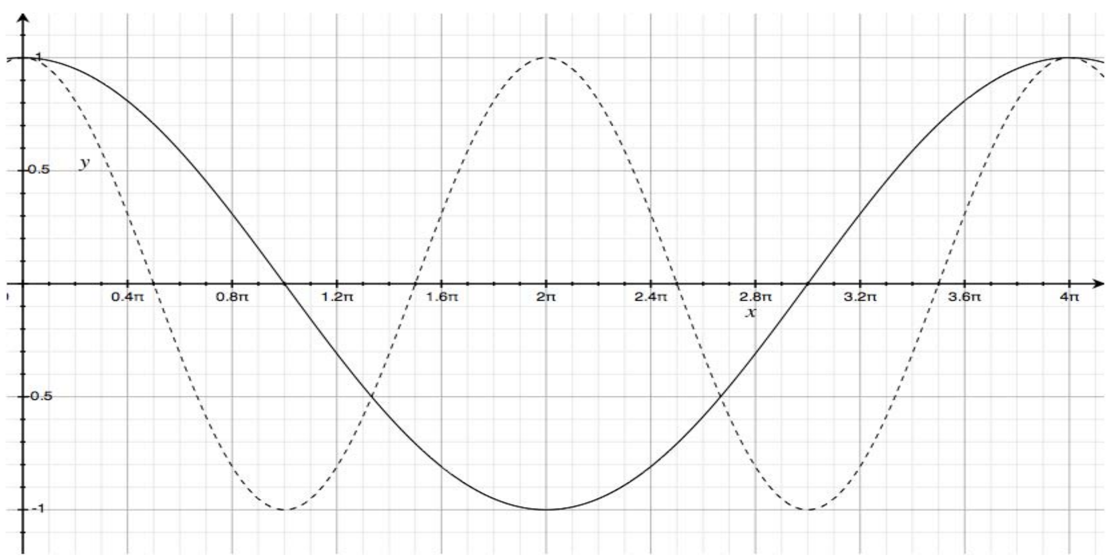


Se incluyó la gráfica de *cos x* (entrecortado) para propósito de comparación.

d) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

El periodo es 4π y la amplitud es 1. Dividimos el periodo,[0, 4π], en cuatro partes:

$0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$.



Se incluyó la gráfica de *cos x* (entrecortada) para propósito de comparación.

24. *EJERCICIOS:*

Grafique un periodo de las siguientes funciones:

a) *y=sen* ($2\pi x$)

b) $y = \frac{1}{2}\cos x$

c) $y = 3\cos(2x)$

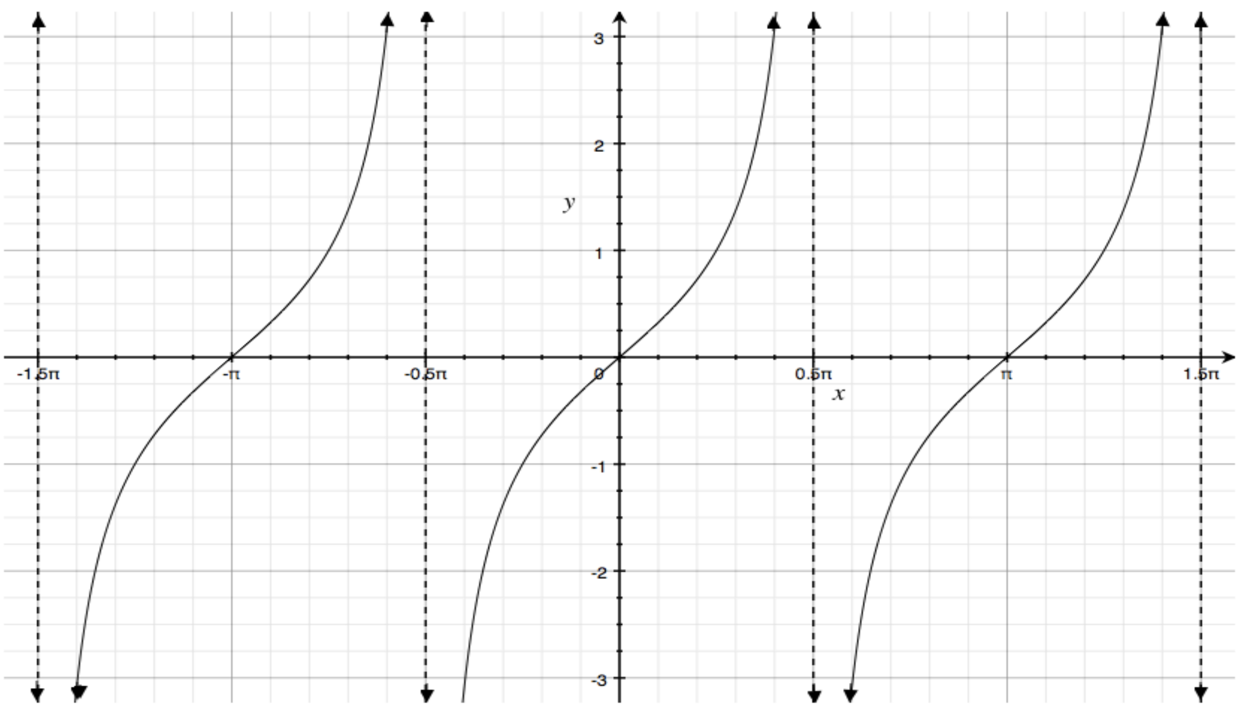
LAS GRÁFICAS DE LAS OTRAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Describiremos el dominio, campo de valores y gráficas de las otras funciones trigonométricas.

1. Tangente

El periodo de la función tangente es π. Debido a que $\tan x = \frac{sen\, x}{\cos x}$,

tenemos que excluir los valores del dominio que hacen el coseno cero. Como vimos anteriormente, estos valores son $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ (los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$). El campo de valores de esta función es **R**.



Se incluyeron unas líneas verticales que representan los valores en los cuales la función tangente no está definida. A estas líneas se le conoce como asíntotas verticales.

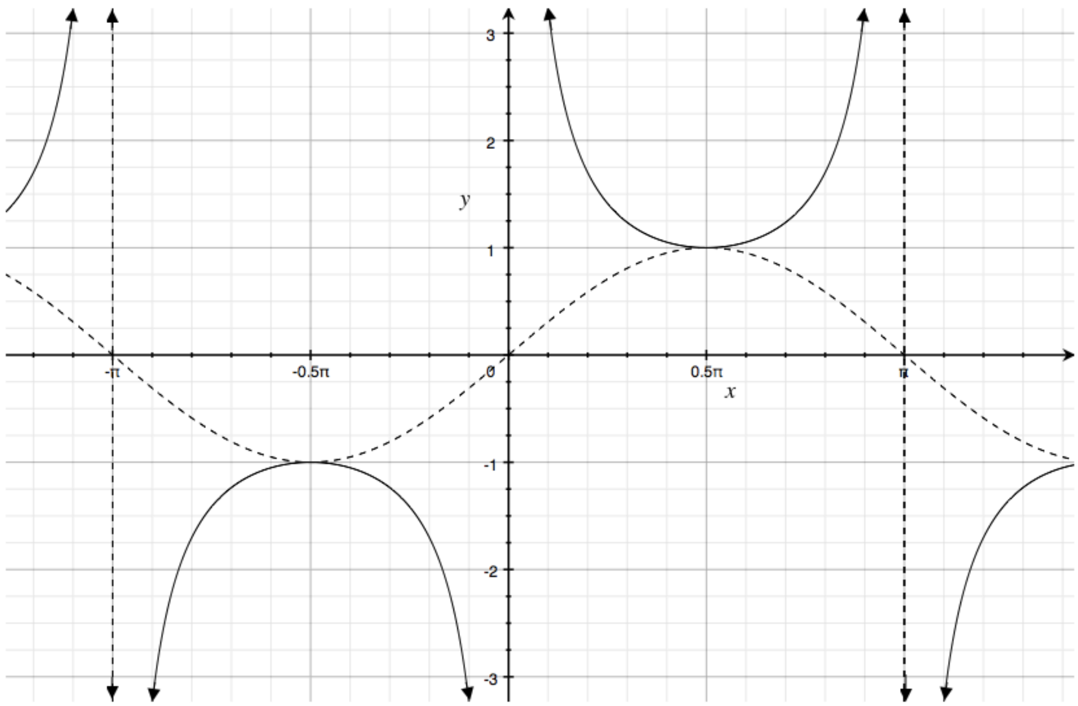
2. Cosecante

El periodo de la función cosecante es 2π. Debido a que $\csc x = \dfrac{1}{sen\, x}$, tenemos que

Excluir los valores del dominio que hacen el seno cero. Estos valores son los múltiplos de

$\pi\,(\ldots,-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,3\pi,\ldots)$. Como $|\sin x| \leq 1$ tenemos que $|\csc x| = \dfrac{1}{|sen\, x|} \geq 1$,

esto es $\csc x \leq -1$ ó $\csc x \geq 1$.



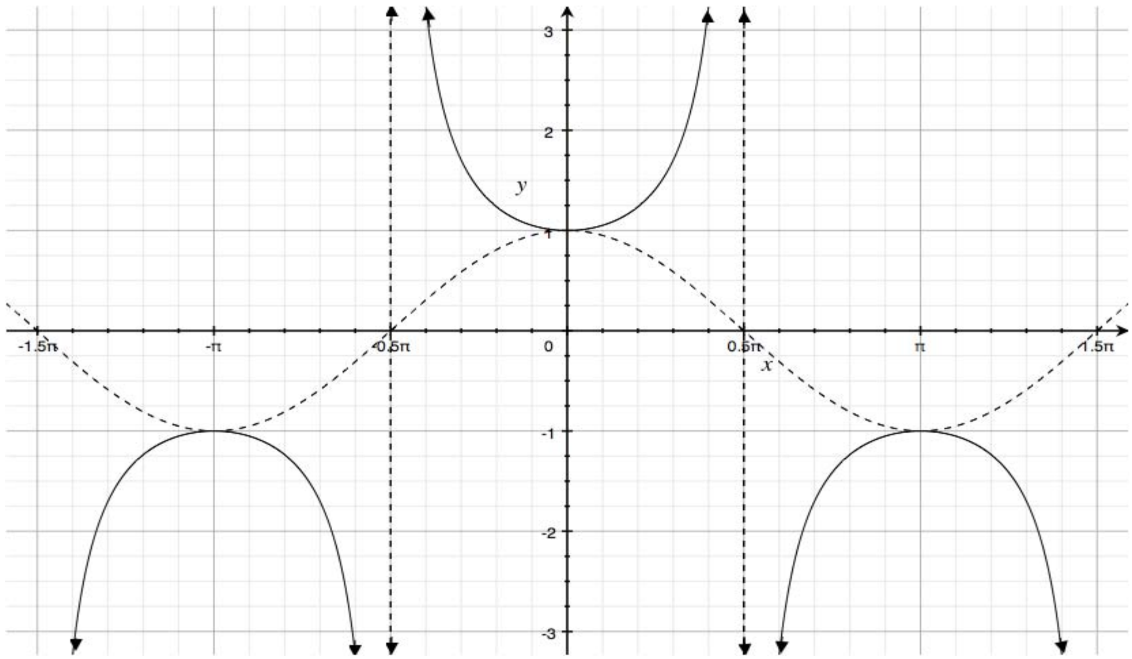
Además de algunas asíntotas verticales, en la gráfica se incluye la función *sin x* (en líneas entrecortadas).

El periodo de la función secante es 2π. Debido a que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, tenemos que excluir

los valores del dominio que hacen el seno cero. Estos valores, al igual que la tangente,

son los múltiplos de impares de $\dfrac{\pi}{2}$ $(\ldots,-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},\ldots)$. Como $|\cos x| \leq 1$ tenemos

que $|\sec x| = \dfrac{1}{|\cos x|} \geq 1$, esto es, $\sec x \leq -1$ ó $\sec x \geq 1$.

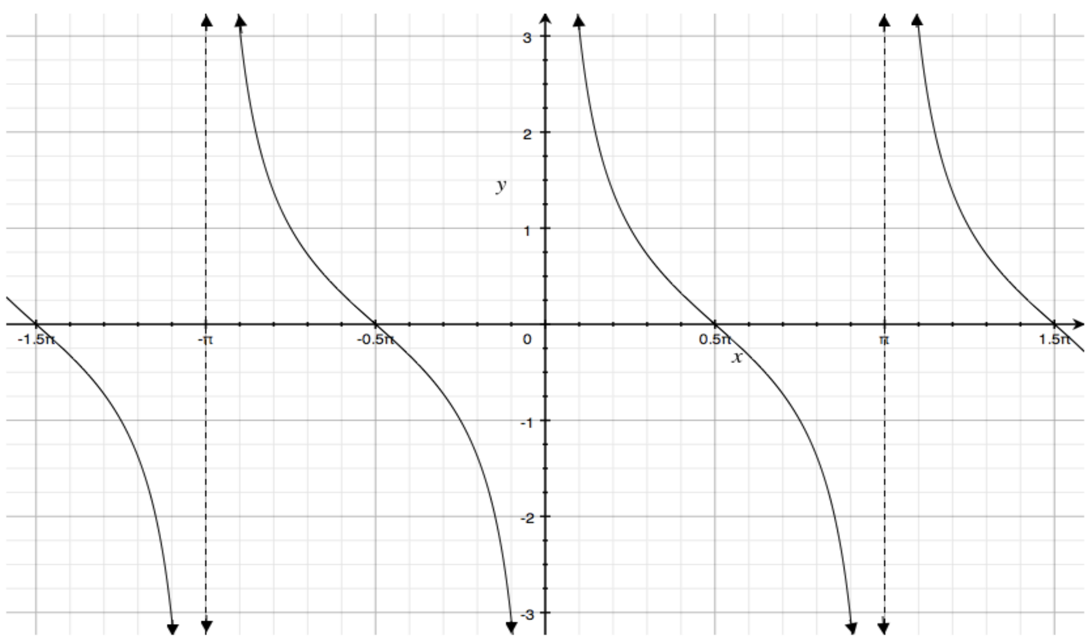


Se incluye en la gráfica la función coseno (en líneas entrecortadas).

3. Cotangente

Por último, el periodo de la cotangente es π. Como $\cot x = \dfrac{\cos x}{sen\, x}$, excluimos los múltiplos de π.

El campo de valores es **R**.



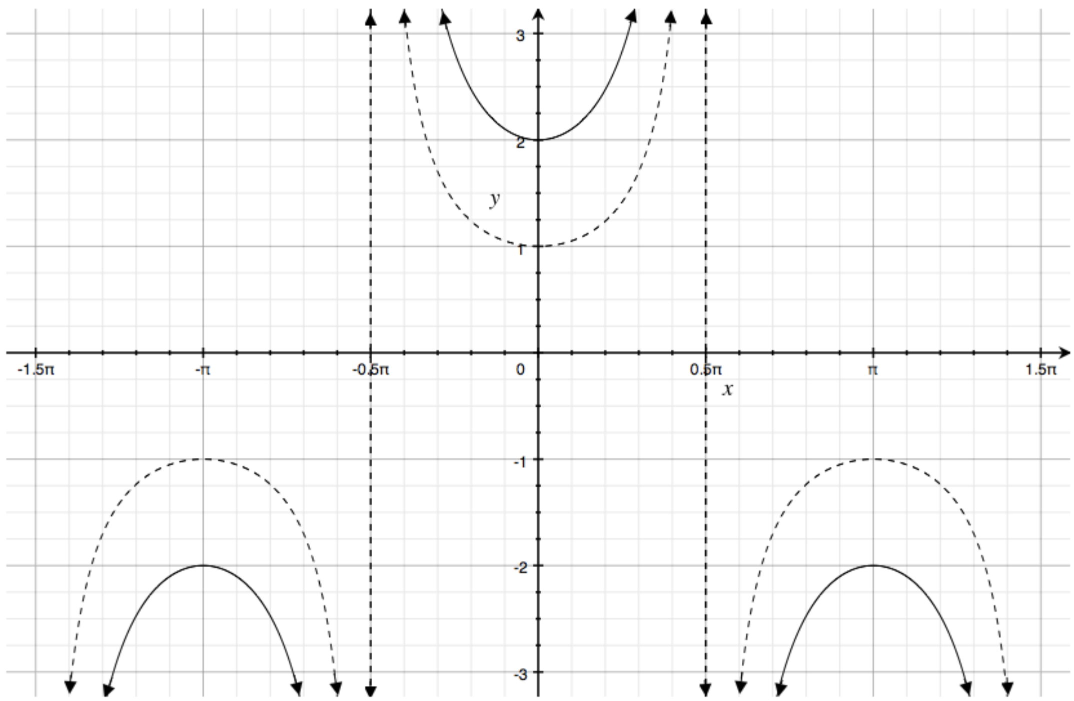
NOTA: Como el periodo de las funciones tangente y cotangente es π cuando tenemos $y = \tan(\omega x)$ ó $y = \cot(\omega x)$ la fórmula para encontrar el periodo es $\dfrac{\pi}{|\omega|}$. En el resto de los casos la fórmula es igual.

EJEMPLOS:

Grafique por lo menos un periodo de las siguientes funciones. Incluya las asíntotas.

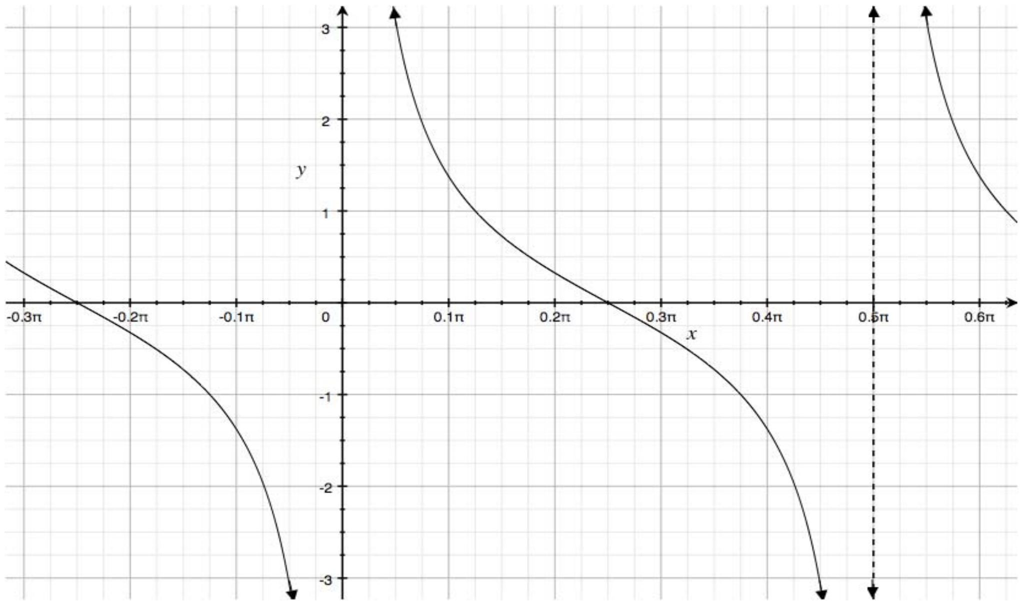
a) *y=2sec x*

El periodo es 2π. Entonces



b) $y = \cot(2x)$

Como $\omega = 2$, el periodo es $\dfrac{\pi}{2}$. Dividimos [0, $\dfrac{\pi}{2}$] en dos partes $0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}$.



25. *EJERCICIOS:*

Grafique por lo menos un periodo de las siguientes funciones. Incluya las asíntotas.

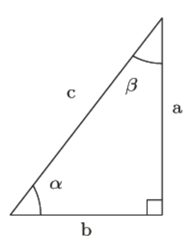
a) $y = \csc 2x$

b) $y = \dfrac{1}{2}\sec(4x)$

c) $y = \tan\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

APLICACIONES A TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Podemos usar las funciones trigonométricas para encontrar los valores de los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Hallar los valores de los lados y los ángulos de un triángulo significa resolver el triángulo. Para los siguientes ejercicios usaremos el siguientes diagrama:



EJEMPLOS:

Resuelva cada triángulo rectángulo con la información dada:

a) $\alpha = 30°$, $a = 10$

Como estamos trabajando con triángulos rectángulos sabemos que 30° + β + 90° = 180°. De esto deducimos que $\beta = 60°$. Para encontrar c usamos la función de cosecante. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{c}{10} &= \csc 30^\circ \\ c &= 10\csc 30^\circ \\ c &= 10(2) \\ c &= 20 \end{aligned}$$

Usando el teorema de Pitágoras encontramos el valor de b:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 10^2 + b^2 &= 20^2 \\ 100 + b^2 &= 400 \\ b^2 &= 300 \\ b &= \sqrt{300} \\ b &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 10, b = 10\sqrt{3}, c = 20, \alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$.

b) $\beta = 45°$, $c = 12$

Para encontrar el ángulo α, usamos α + 45° + 90° = 180°. Con esto tenemos $\alpha = 45°$. Debido a que los lados opuestos a ángulos congruentes son iguales deducimos que $a = b$. Con esto y usando el teorema de Pitágoras encontramos el valor de a:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 + a^2 &= 12^2 \\ 2a^2 &= 144 \\ a^2 &= 72 \\ a &= \sqrt{72} \\ a &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 6\sqrt{2}, b = 6\sqrt{2}, c = 12, \alpha = 45^\circ$ y $\beta = 45^\circ$.

c) $\alpha = 39.7°$, $a = 3.46$

Para encontrar el ángulo α, usamos α + 39.7° + 90° = 180° y encontramos que $\beta = 50.3°$. Usando la función trigonométrica seno encontramos c (usando la calculadora).

$$sen 39.7^{\circ} = \frac{3.46}{c}$$
$$c = \frac{3.46}{sen 39.7^{\circ}}$$
$$c \approx 5.42$$

Usando el teorema de Pitágoras tenemos

$$b \approx \sqrt{5.42^2 - 3.46^2}$$
$$b \approx 4.16$$

NOTA: En el ejemplo anterior, usamos seno en vez de cosecante para calcular *c* porque las calculadoras no tienen las funciones cosecante, secante y cotangente.

26. *EJERCICIOS:*

Resuelva cada uno de los triángulos rectángulos dada la siguiente información:

a) $\alpha = 75°$, $b = 10$

b) $\beta = 40°$, $b = 10$

c) $a = 2$, $b = 4$

EJERCICIOS ADICIONALES

1) Determine si los siguientes ángulos son coterminales:

a) -110° y 250°

b) 40° y 2,120°

c) 145° y 515°

2) Cambie los siguientes ángulos de grados a radianes:

a) 32^{o}

b) 345^{o}

3) Cambie los siguientes ángulos de radianes a grados:

a) $\frac{7\pi}{90}$

b) -11π

4) Para el triángulo rectángulo con a = 10, b = 11, calcule las 6 razones trigonométricas:

5) Determine las seis razones trigonométricas del ángulo generado por el lado terminal que pasa por el punto (-1,4).

6) Encuentre el valor exacto de las siguientes expresiones:

a) sen (-1,755°)

b) $\cot\frac{7\pi}{2}$

c) $\cos 100\pi$

7) Use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de las siguientes razones:

a) $\cot\theta$, si $\csc\theta = -\frac{5}{3}, \cos\theta < 0$

b) $sen\theta$, si $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{7}, \tan\theta > 0$

8) Verifique las siguientes identidades:

a) $\tan x \csc x = \tan x senx + \cos x$

b) $\dfrac{1-2\cos^2 x}{senx \cos x} = \tan x - \cot x$

c) $\dfrac{senx + \tan x}{\csc x + \cot x} = senx \tan x$

9) Use las fórmulas de medio ángulo para encontrar el valor exacto de las siguientes expresiones:

a) $sen\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

b) $\cos 112.5^{o}$

10) Encuentre el valor de las siguientes razones trigonométricas usando la información suministrada:

a) $sen 2\theta\, si\ \cos\theta = \dfrac{3}{5}, \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

b) $\cos 2\theta\, si\ \cos\theta = \dfrac{3}{5}$

11) Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos x = -\dfrac{1}{2}, 0 < x < 2\pi$

b) $2sen^2 x - 5senx - 3 = 0$

c) $\sqrt{3}\tan^2 x = -\tan x$

12) Grafique un periodo de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

b) $y = 3sen\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

13) Resuelva cada triángulo rectángulo dada la siguiente información:

a) $\alpha = 30°$, $b = 15$

b) $\beta = 38°$, $c = 23$

POS-PRUEBA

1) Determine si los siguientes ángulos son coterminales:

a) 339° y -21°

b) 715° y 5°

c) 2,193° y -33°

2) Cambie los siguientes ángulos de grados a radianes:

a) 255°

b) -210°

3) Cambie los siguientes ángulos de radianes a grados:

a) $\frac{5\pi}{18}$

b) 19π

4) Para el siguiente triángulo rectángulo calcule las 6 razones trigonométricas:

a) a = 1, b = 5

5) Determine las seis razones trigonométricas del ángulo cuyo lado terminal que pasa por el punto (2,-3).

6) Encuentre el valor exacto de las siguientes expresiones:

a) cot (-690°)

b) $\cos\frac{10\pi}{3}$

c) $sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

7) Use las identidades trigonométricas para encontrar el valor exacto de las siguientes funciones:

a) $\tan\theta$, si $\csc\theta = \sqrt{7}, \cot\theta < 0$

b) $\cot\theta,\ \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{7}, sen\theta > 0$

8) Verifique las siguientes identidades:

a) $sen\theta + sen\theta \cot^2 \theta = \csc\theta$

b) $senx \cos x \tan x = 1 - \cos^2 x$

c) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

d) $sen\,x(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + sen^2 x$

9) Usando las fórmulas de medio ángulo encuentre el valor exacto de las siguientes expresiones:

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

b) $sen165^{\circ}$

10) Encuentre el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $\cos 2\theta$, si $\cos\theta = -\frac{4}{7}$

b) $sen2\theta$, si $\cos\theta = \frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

11) Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sec x = 2, 0 < x < 360^{\circ}$

b) $2sen\,x - \sqrt{2} = 0$

c) $sen\,x \tan^2 x = sen\,x$

12) Grafique un periodo de las siguientes funciones:

a) $y = cos(2\pi x)$

b) $y = 2sen(2x)$

13) Resuelva cada triángulo rectángulo dada la siguiente información: (Suponga que a y b representan las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa).

a) $a = 7$, $b = 12$

b) $\beta = 54°$, $b = 14$

Respuestas de la pre-prueba

1. a) si
   b) no
   c) si

2. a) $\dfrac{\pi}{6}$

b) $\dfrac{\pi}{2}$

3. a) 10^{o}

b) 180^{o}

4. $sen\theta = \dfrac{4}{5}$ $\csc\theta = \dfrac{5}{4}$

$\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ $\sec\theta = \dfrac{5}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ $\cot\theta = \dfrac{3}{4}$

5. $sen\theta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ $\csc\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ $\sec\theta = \sqrt{10}$

$\tan\theta = 3$ $\cot\theta = \dfrac{1}{3}$

6. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $-\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7. a) $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

9. a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

10. a) $\frac{7}{25}$

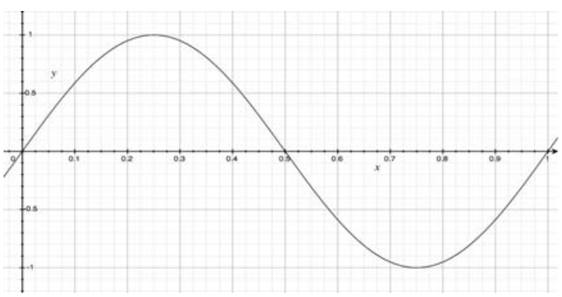
b) $\frac{24}{25}$

11. a) $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

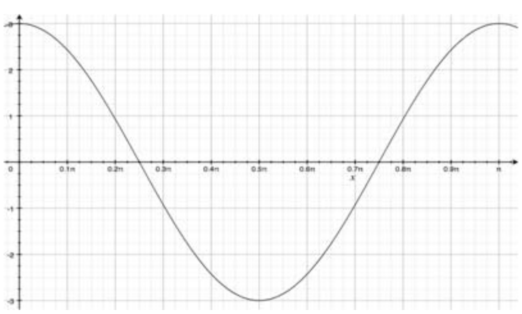
b) $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$

12. a)



b)



13. a) $\beta = 60°$, $b = 10\sqrt{3}$, $c = 20$

b) $\alpha = 45°,\ a = b = 6\sqrt{2}$

Respuestas de los ejercicios en el módulos

1. a) una vuelta y 196°

   b) dos vueltas y 100°

   c) cinco vueltas y 330°

2. a) 90° a favor de las manecillas del reloj

   b) dos vueltas y 80° a favor de las manecillas del reloj

   c) dos vueltas y 240° a favor de las manecillas del reloj

3. a) si

   b) no

   c) si

4. a) $\frac{\pi}{4}$

   b) π

   c) $\frac{3\pi}{2}$

   d) $\frac{\pi^2}{180}$

6. a) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\circ}$

   b) 36°

7. a) $$sen\theta = \frac{5\sqrt{34}}{34} \quad \csc\theta = \frac{\sqrt{34}}{5}$$
   $$\cos\theta = \frac{3\sqrt{34}}{34} \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{34}}{6}$$
   $$\tan\theta = \frac{5}{3} \quad \cot\theta = \frac{3}{5}$$

b)
$$\begin{array}{ll} sen\theta=\frac{\sqrt{15}}{4} & \csc\theta=\frac{4\sqrt{15}}{15} \\ \cos\theta=\frac{1}{4} & \sec\theta=4 \\ \tan\theta=\sqrt{15} & \cot\theta=\frac{\sqrt{15}}{15} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} sen\theta=\frac{7\sqrt{53}}{53} & \csc\theta=\frac{\sqrt{53}}{7} \\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{53}}{53} & \sec\theta=\frac{\sqrt{53}}{2} \\ \tan\theta=\frac{7}{2} & \cot\theta=\frac{2}{7} \end{array}$$

8. a)
$$\begin{array}{ll} sen\theta=\frac{3\sqrt{13}}{13} & \csc\theta=\frac{\sqrt{13}}{3} \\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{13}}{13} & \sec\theta=\frac{\sqrt{13}}{2} \\ \tan\theta=\frac{3}{2} & \cot\theta=\frac{2}{3} \end{array}$$

9. a)
$$\begin{array}{ll} sen\theta=-\frac{2}{5} & \csc\theta=-\frac{5}{2} \\ \cos\theta=\frac{\sqrt{21}}{5} & \sec\theta=\frac{5\sqrt{21}}{21} \\ \tan\theta=\frac{2\sqrt{21}}{21} & \cot\theta=\frac{\sqrt{21}}{2} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} sen\theta=1 & \csc\theta=1 \\ \cos\theta=0 & \sec\theta=nd \\ \tan\theta=nd & \cot\theta=0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} sen\theta=0 & \csc\theta=nd \\ \cos\theta=-1 & \sec\theta=-1 \\ \tan\theta=0 & \cot\theta=nd \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} sen\theta=-1 & \csc\theta=-1 \\ \cos\theta=0 & \sec\theta=nd \\ \tan\theta=nd & \cot\theta=0 \end{array}$$

10. Vea el diagrama debajo del ejercicio

11. a) $-\sqrt{2}$

b) $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

c) $\frac{\sqrt{10}}{11}$

12. a) $-\sqrt{3}$

b) -2

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. a) $-\sqrt{3}$

b) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $-\frac{1}{2}$

14. a) 0

b) 1

c) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

15. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

17. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

19. a) $sen 2\theta = \frac{336}{625}, \cos 2\theta = -\frac{527}{625}, \tan 2\theta = -\frac{336}{527}$

b) $sen 2\theta = -\frac{8}{17}, \cos 2\theta = -\frac{15}{17}, \tan 2\theta = \frac{15}{8}$

c) $sen 2\theta = -\frac{3\sqrt{7}}{8}, \cos 2\theta = -\frac{1}{8}, \tan 2\theta = -3\sqrt{7}$

21.a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

22. a) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

b) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

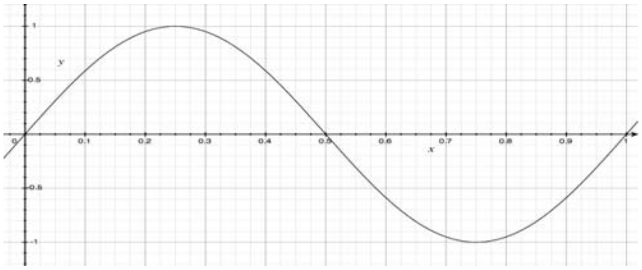
c) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

23. a) 0, π

b) no tiene solución

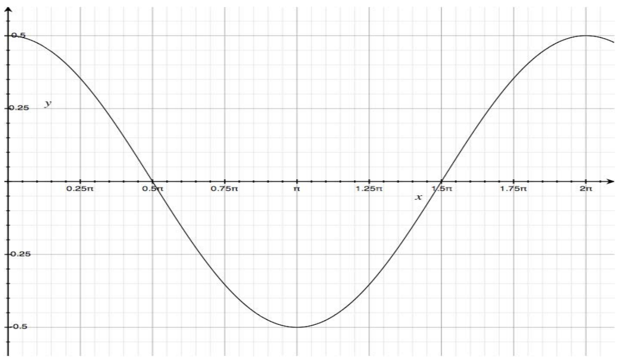
c) π

24. a)



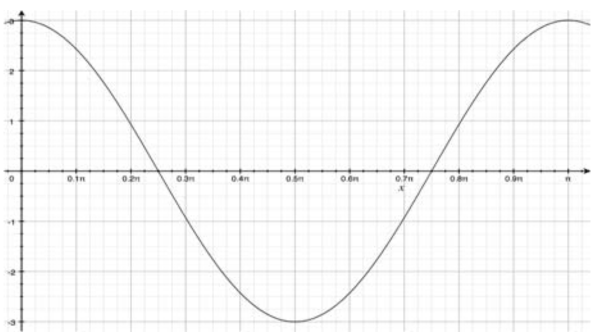
1
0.5
y
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x
-0.5
-1

b)



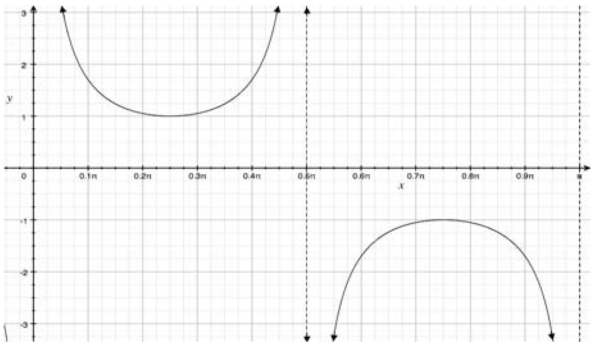
0.5
0.25
y
0.25π
0.5π
0.75π
π
1.25π
1.5π
1.75π
2π
x
-0.25
-0.5

c)

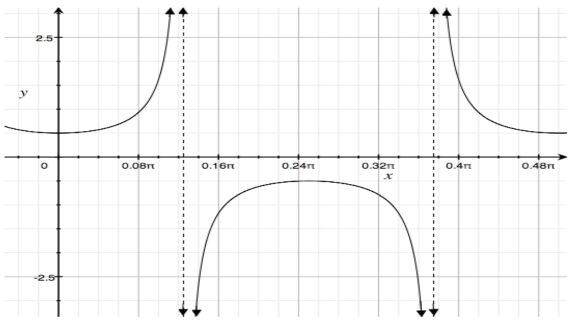


3
2
1
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
x
-1
-2
-3

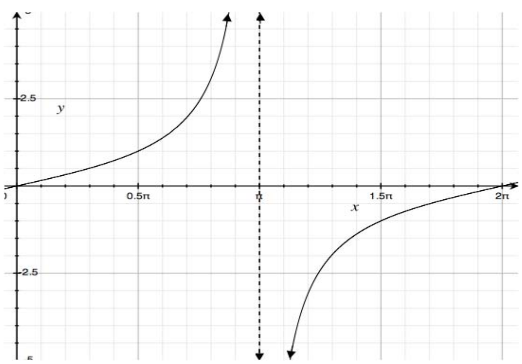
25. a)



b)



c)



26. a) $\beta = 15°$, $a \approx 37.3$, $c \approx 36.6$

  b) $\alpha = 50°$, $a \approx 11.9$, $c \approx 15.6$

  c) $\alpha \approx 26.6°$, $\beta \approx 63.4°$, $c = 2\sqrt{5}$

Respuestas de los ejercicios adicionales

1. a) si

  b) si

  c) no

2. a) $\frac{8\pi}{45}$

b) $\frac{23\pi}{12}$

3. a) 14°

b) -1,980°

4.
$$\begin{array}{ll} sen\,\theta = \frac{11\sqrt{221}}{221} & \csc\theta = \frac{\sqrt{221}}{11} \\ \cos\theta = \frac{10\sqrt{221}}{221} & \sec\theta = \frac{\sqrt{221}}{10} \\ \tan\theta = \frac{11}{10} & \cot\theta = \frac{10}{11} \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{ll} sen\,\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17} & \csc\theta = \frac{\sqrt{17}}{4} \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{17}}{17} & \sec\theta = -\sqrt{17} \\ \tan\theta = -4 & \cot\theta = -\frac{1}{4} \end{array}$$

6. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) 0

c) 1

7. a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{\sqrt{47}}{7}$

9. a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

10. a) $-\frac{24}{25}$

b) $-\frac{7}{25}$

11. a) $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$

$x=\frac{11\pi}{6}+2\pi k$

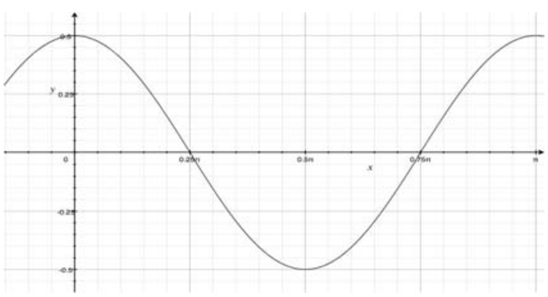
$x=0+2\pi k$

$x=\pi+2\pi k$

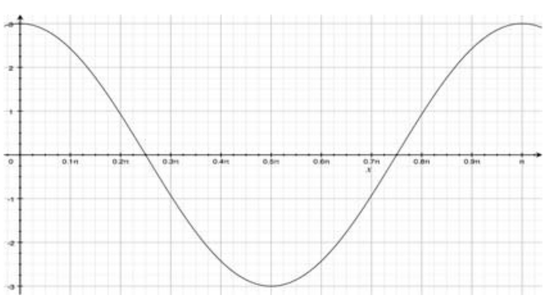
b) $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

$x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$

12. a)



b)



Respuestas de la pos-prueba

1. a) si

b) no

c) no

2. a) $\frac{5\pi}{4}$

b) $-\frac{7\pi}{6}$

3. a) 50°

b)3,420°

4. a)
$$\begin{array}{ll} sen\theta = \frac{5\sqrt{26}}{26} & \csc\theta = \frac{\sqrt{26}}{5} \\ \cos\theta = \frac{\sqrt{26}}{26} & \sec\theta = \sqrt{26} \\ \tan\theta = 5 & \cot\theta = \frac{1}{5} \end{array}$$

5. a)
$$\begin{array}{ll} sen\theta = \frac{-3\sqrt{13}}{13} & \csc\theta = -\frac{\sqrt{13}}{3} \\ \cos\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13} & \sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2} \\ \tan\theta = -\frac{3}{2} & \cot\theta = -\frac{2}{3} \end{array}$$

6. a) $\sqrt{3}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{2}$

7. a) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{30}}{12}$

9. a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

10. a) $-\frac{17}{49}$

b) $-\frac{4}{5}$

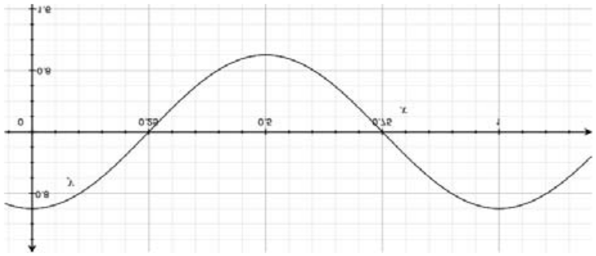
11. a) $x = 60^{\circ}, 300^{\circ}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$
$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

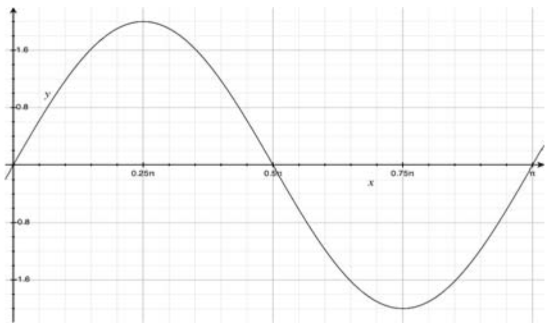
$x = 0 + 2\pi k$
$x = \pi + 2\pi k$

c) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$
$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$
$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$
$x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$

12. a)



b)



13. a) $c = \sqrt{193}$, $\alpha \approx 59.7°$, $\beta \approx 30.3°$

b) $\alpha = 36°$, $b \approx 17.3$, $c \approx 10.2$