

# MATRICES Y APLICACIONES

Prof. Esperanza Vélez, MS.  
Departamento de Matemáticas  
Universidad de Puerto Rico en Bayamón

## PREPRUEBA

I. En los ejercicios 1 a 9, seleccione la respuesta correcta.

1) El tamaño de la matriz  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  es

- a)  $2 \times 3$
- b)  $3 \times 2$
- c)  $6 \times 1$
- d)  $1 \times 6$

2) En la matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$  el elemento  $a_{32}$  es

- a) 4
- b) -4
- c) 8
- d) -5

3) Si  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$  entonces  $A + 2B$  es igual a

a)  $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \\ 9 & -10 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 8 & -3 \\ -14 & 13 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 8 \\ 13 & -14 \end{bmatrix}$

4) Si  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 4 & -3 \end{bmatrix}$  entonces  $A^T$  es

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -3 & -5 & 0 & 2 \\ -1 & -8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \\ 4 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

5) Si  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$  entonces  $A - B^T$  es igual a

a)  $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -13 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -13 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -7 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 11 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

6) Si  $A$  es una matriz de tamaño  $2 \times 3$ ,  $B$  es  $3 \times 5$ ,  $C$  es  $5 \times 3$  y  $D$  es  $3 \times 2$ ,  
¿cuál de los siguientes productos está definido? .

a)  $AD^T$

b)  $BA$

c)  $DB$

d)  $AC^T$

7) Si  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ , entonces  $AB$  es

a)  $\begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 20 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 20 & 4 & 0 \\ -10 & -5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

d) El producto no está definido.

8) La matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  es

a) Triangular superior

b) Triangular inferior

c) Simétrica

d) Diagonal

9) La inversa de la matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  es

a)  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

II. Resuelva el siguiente ejercicio.

Un supermercado vende 98 latas de habichuelas, 75 de maíz y 200 de salsa de tomate el día viernes. El día sábado vende 122 latas de habichuelas, 90 de maíz y 215 de salsa de tomate. Los precios por unidad de cada uno de los productos son respectivamente, \$1.22, \$0.65 y \$0.25.

- 1) Escribir una matriz de tamaño  $2 \times 3$  que represente la cantidad de productos vendidos en los dos días.
- 2) Escribir un vector columna que represente el precio por unidad de cada producto.
- 3) Hallar el vector columna cuyos elementos muestren los ingresos obtenidos por concepto de ventas los días viernes y sábado respectivamente.

## OBJETIVOS

Al finalizar el estudio del módulo, el participante podrá:

1. indicar el tamaño de una matriz.
2. efectuar las operaciones de suma, resta, y multiplicación por escalar de matrices, siempre que la operación esté definida.
3. determinar si el producto de dos matrices está definido.
4. multiplicar dos matrices siempre que su producto esté definido.
5. identificar una matriz cuadrada como simétrica, diagonal, triangular superior, triangular inferior o ninguna de las anteriores.
6. hallar la transpuesta de una matriz dada.
7. hallar la inversa de una matriz cuadrada no singular.
8. resolver problemas verbales (sencillos) que involucren operaciones básicas con matrices.
9. resolver sistemas de ecuaciones lineales usando la inversa de la matriz de los coeficientes (dado que exista).

## JUSTIFICACIÓN

Las matrices como una generalización del concepto de número constituyen un tópico muy importante dentro de las matemáticas, debido a sus aplicaciones tanto en la matemáticas puras como en las aplicadas.

El desarrollo de la teoría de matrices ha recibido muchas contribuciones a través de la historia. Primero aparece el término matriz, el cual fue introducido por Sylvester. A Cayley se atribuyen las operaciones de suma, resta, multiplicación por escalar, producto de matrices y otras contribuciones. Matemáticos como Hermite, Jacobi, Frobenius y otros hicieron valiosos aportes en este campo.

La importancia de las matrices es que ellas se han convertido en una herramienta cotidiana en numerosos campos como estadística, economía, física, biología, gráficas por computadora, análisis numérico y lenguajes de programación, debido a la gran cantidad de conceptos que se pueden representar por medio de una matriz. Por otra parte, las matrices constituyen una herramienta adecuada para tratar de un modo sistemático y relativamente sencillo, complicados cálculos numéricos y algebraicos que involucran un gran número de datos.

En tiempos recientes el desarrollo de la teoría matricial está orientado hacia las aplicaciones.

El propósito de este trabajo es presentar la teoría básica de las matrices, la cual se expone en cuatro partes: la Parte I contiene el concepto de matriz, notación matricial, igualdad de matrices y operaciones de suma, resta y multiplicación por escalar; la Parte II contiene la multiplicación de matrices y potencias enteras positivas de una matriz cuadrada; la Parte III contiene la transpuesta de una matriz y algunos tipos de matrices cuadradas y la Parte IV contiene la inversa de una matriz y su aplicación en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Además, se presentan en este trabajo ejemplos que ilustran algunas aplicaciones de las matrices. Cada una de las partes mencionadas tiene ejercicios propuestos, para los cuales se provee sus respuestas.

## CONTENIDO

### I. Matrices- Generalidades y Operaciones

#### *Definición*

Una matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$  es un arreglo rectangular de números (reales o complejos) dispuestos en  $m$  filas y  $n$  columnas, de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La anterior matriz se puede expresar como  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , en donde  $a_{ij}$  representa el elemento de la matriz que está en la fila  $i$  y en la columna  $j$ .

Una matriz que tiene  $n$  filas y  $n$  columnas, se llama *matriz cuadrada de orden  $n$* .

Los *vectores fila* de la matriz  $A$  están dados por

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ij} \ \dots \ a_{in}] \text{ con } i = 1, 2, \dots, m$$

Similarmente, los *vectores columna* de la matriz  $A$  están dados por

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \text{ con } j = 1, 2, \dots, n$$



Ejemplos:

1. Dada

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 8 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

A es una matriz cuadrada de orden 3, en donde  $a_{11} = \sqrt{5}$ ,  $a_{12} = 3$ ,  $a_{13} = -1$ ,  $a_{21} = -2$ ,  $a_{22} = 0$ ,  $a_{23} = 1$ ,  $a_{31} = 8$ ,  $a_{32} = \frac{2}{3}$  y  $a_{33} = 0$ .

2. Escribir una matriz  $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$  en donde  $b_{ij} = (-1)^{i+j} (2i + j)$ .

*Solución:*

$$b_{11} = (-1)^{1+1} (2(1)+1) = (1)(3) = 3 \quad ; \quad b_{12} = (-1)^{1+2} (2(1)+2) = (-1)(4) = -4$$

$$b_{13} = (-1)^{1+3} (2(1)+3) = (1)(5) = 5 \quad ; \quad b_{21} = (-1)^{2+1} (2(2)+1) = (-1)(5) = -5$$

$$b_{22} = (-1)^{2+2} (2(2)+2) = (1)(6) = 6 \quad ; \quad b_{23} = (-1)^{2+3} (2(2)+3) = (-1)(7) = -7$$

Por lo tanto,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -5 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Además, los vectores filas de  $B$  son  $[3 \quad -4 \quad 5]$  y  $[-5 \quad 6 \quad -7]$ .

Los vectores columna de  $B$  son  $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ .

**Diagonal Principal**

En una matriz cuadrada  $A_{n \times n}$ , los elementos  $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$  forman la *diagonal* o *diagonal principal* de la matriz.

3. Si  $A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & -3 \\ 3 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 4 & \boxed{5} \end{bmatrix}$ , su diagonal principal es  $\{2, -1, 5\}$ .

### ***Traza de una Matriz Cuadrada***

En una matriz cuadrada  $A_{n \times n}$ , la *traza de A* es la suma de los elementos que forman la diagonal de la matriz. La traza de la matriz  $A$  se denota por  $tr(A)$ . Es decir,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ejemplo:

La traza de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -4 & -4 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ , entonces

$$tr(A) = 1 + (-4) + 7 + (-2) = 2$$

### ***Igualdad de matrices***

Dos matrices  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  son iguales si

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ con } i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n$$

Es decir, dos matrices del mismo tamaño son iguales si sus elementos correspondientes (elementos de la misma posición) son iguales.

Ejemplo:

Hallar el valor de cada una de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $p$  y  $q$ , para que se satisfaga la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} 3x & \frac{2}{3}p \\ x-y & p+q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

*Solución:*

Aplicando el concepto de igualdad de matrices, se tiene

$$3x = -6 ; x - y = -5 ; \frac{2}{3}p = 4 \text{ y } p + q = 5$$

De las anteriores ecuaciones se obtiene que

$$x = -2 ; y = 3 ; p = 6 \text{ y } q = -1.$$

## Operaciones con matrices

### 1. Suma de matrices

Sean las matrices  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , entonces la suma de  $A$  y  $B$  es la matriz

$$(A+B) = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} ; i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n$$

Es decir, para sumar dos matrices, éstas deben tener el mismo tamaño y se procede a sumar los elementos correspondientes.

#### Ejemplos

1.

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -2 & 2 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4+(-2)) & (-6+(-2)) & (0+4) \\ (-2+1) & (2+(-4)) & (-7+5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Hallar la matriz  $B$  tal que  $A+B=C$ , en donde  $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$  y  $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ .

*Solución:*

Sea  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ , entonces la ecuación matricial  $A+B=C$  es

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+b_{11} & 3+b_{12} \\ 1+b_{21} & -4+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Aplicando el concepto de igualdad de matrices, se tiene

$$-4+b_{11} = -3, \text{ entonces } b_{11} = 1 ; \quad 3+b_{12} = 2, \text{ entonces } b_{12} = -1$$

$$1+b_{21} = -2, \text{ entonces } b_{21} = -3 ; \quad -4+b_{22} = 4, \text{ entonces } b_{22} = 8$$

$$\text{Por lo tanto, } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

### Propiedades de la suma de matrices

#### a. Clausura

Si se suman dos matrices de tamaño  $m \times n$ , el resultado es nuevamente una matriz  $m \times n$ .

b. *Asociativa*

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices del mismo tamaño.

c. *Existencia de la Identidad*

Existe una matriz  $m \times n$  llamada la Matriz Cero, cuyas entradas son todas iguales a cero,

$$O = \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]}_{n \text{ columnas}} \left. \vphantom{\left[ \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]} \right\} m \text{ filas}$$

con la propiedad  $A+O = A$ , para cualquier matriz  $A_{m \times n}$ . La Matriz Cero es la Identidad de la suma de matrices.

d. *Existencia de la Matriz Opuesta*

Para cada matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  existe la matriz  $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ , con la propiedad

$$A + (-A) = O$$

La matriz  $-A$  se llama la matriz opuesta de  $A$ .

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -\frac{4}{5} & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \text{ entonces } -A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ \frac{4}{5} & -3 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

e. *Conmutativa*

Si  $A$  y  $B$  son matrices del mismo tamaño, entonces

$$A+B = B+A$$

Es decir, el orden en que se suman las matrices no altera el resultado.

### f. La Trazo de una Suma de Matrices

La traza de una suma de matrices es la suma de las trazas de las matrices. Es decir,

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

Ejemplo:

Dadas las matrices  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -8 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ -8 & -4 & -5 \\ 7 & 3 & -9 \end{bmatrix}$ , hallar:

a)  $A+B$

b) Verificar que  $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

*Solución*

a)  $A+B = \begin{bmatrix} 8 & 8 & -1 \\ -16 & -6 & -2 \\ 17 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

b)  $\text{tr}(A) = 2 + (-2) + 2 = 2$

$$\text{tr}(B) = 6 + (-4) + (-9) = -7$$

$$\text{tr}(A+B) = 8 + (-6) + (-7) = -5 = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

### 2. Resta de matrices

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices del mismo tamaño. Entonces

$$A - B = A + (-B)$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -8 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -8 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & -8 \\ -2 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -8 \\ -10 & 9 & -9 \\ 4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

### 3. Producto por un Escalar

Dada una matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $k$  un escalar, entonces el producto  $kA$  es la matriz

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n} \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad ; \quad j = 1, \dots, n$$

Es decir, el escalar multiplica a cada elemento de la matriz.

Ejemplos:

1. Dada  $A = \begin{bmatrix} -4 & \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ , hallar:

a)  $6A$

b)  $-\frac{1}{2}A$

*Solución*

a)  $6A = \begin{bmatrix} -24 & 3 & 60 \\ 0 & 36 & -12 \end{bmatrix}$

b)  $-\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{4} & -5 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

2. Una compañía vende dos tipos de juguetes: de acción y educativos.

La matriz  $A$  representa las ventas (en miles de dólares) de la compañía de juguetes en el año 2003, en tres ciudades, y la matriz  $B$  representa las ventas en las mismas ciudades en el año 2005.

$$A = \begin{matrix} \text{Acción} \\ \text{Educativos} \end{matrix} \begin{bmatrix} 400 & 350 & 150 \\ 450 & 280 & 850 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{matrix} \text{Acción} \\ \text{Educativos} \end{matrix} \begin{bmatrix} 380 & 330 & 220 \\ 460 & 320 & 750 \end{bmatrix}$$

La compañía compra a un competidor y en el año 2006 dobla las ventas que tuvo en el año 2005. ¿Cuál es el cambio en ventas entre el año 2003 y el 2006?

*Solución*

Las ventas en el año 2006, están dadas por

$$2B = 2 \begin{bmatrix} 380 & 330 & 220 \\ 460 & 320 & 750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 760 & 660 & 440 \\ 920 & 640 & 1500 \end{bmatrix}$$

El cambio en ventas entre el año 2003 y el 2006, está dado por

$$2B - A = \begin{bmatrix} 760 & 660 & 440 \\ 920 & 640 & 1500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 400 & 350 & 150 \\ 450 & 280 & 850 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360 & 310 & 290 \\ 470 & 360 & 650 \end{bmatrix}$$

Las ventas en el 2006 superaron a las del 2003 por \$ 960,000 en juguetes de acción y \$1,480,000 en juguetes educativos.

**Propiedades del Producto por un Escalar**

Si  $A$  y  $B$  son matrices del mismo tamaño y  $k$  y  $l$  son escalares, entonces

- a.  $k(A + B) = kA + kB$
- b.  $(k + l)A = kA + lA$
- c.  $(kl)A = k(lA)$
- d.  $1A = A$
- e. Si  $A$  es una matriz cuadrada entonces

$$tr(kA) = k(tr(A))$$

Es decir, la traza de un escalar por una matriz cuadrada es igual al escalar por la traza de la matriz.

**EJERCICIOS – PARTE I**

1) Dar el tamaño de cada una de las siguientes matrices.

a)  $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$     b)  $[5 \ 8 \ -3 \ 2]$     c)  $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

2) Dada la siguiente matriz  $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

- a) Escribir los vectores fila de la matriz.
- b) Escribir los vectores columna de la matriz.

3) Escribir una matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$  en donde  $a_{ij} = (-1)^{i+j} (i - j)$ .

4) Dadas las matrices  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ , hallar:

- a)  $A + B$     b)  $A - B$     c)  $4A$     d)  $-3B$     e)  $3A - 2B$     f)  $2A + 4B$

5) Hallar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , para que se dé la siguiente igualdad

$$\begin{bmatrix} 2a & 2 \\ c+a & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & a+3b \\ 5 & b+c \end{bmatrix}$$

6) Una compañía de piezas para auto produce distribuidores, bujías e imanes en dos plantas I y II. La matriz  $X$  representa la producción de las dos plantas para el detallista A y la matriz  $Y$  representa la producción de las dos plantas para el detallista B. Escribir una matriz que represente la producción total en las dos plantas para ambos detallistas. Las matrices  $X$  y  $Y$  son las siguientes

$$X = \begin{array}{c} \text{distribuidores} \\ \text{bujías} \\ \text{imanes} \end{array} \begin{array}{cc} I & II \\ \begin{bmatrix} 30 & 50 \\ 800 & 720 \\ 25 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{y} \quad Y = \begin{array}{c} \text{distribuidores} \\ \text{bujías} \\ \text{imanes} \end{array} \begin{array}{cc} I & II \\ \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 960 & 800 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

7) Sea  $P = [p_1 \ p_2 \ p_3]$  un vector fila que muestra los precios de tres productos A, B y C respectivamente. Los precios van a ser incrementados en un 10%. ¿Cuál es el escalar por el cual se debe multiplicar el vector fila  $P$ , para obtener el vector de los nuevos precios?

8) Dadas las matrices  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 3 \\ 3 & -\frac{3}{4} & 4 \\ -2 & -8 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 5 & 7 \\ 4 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ , hallar

- a)  $tr(A)$
- b)  $tr(B)$
- c)  $tr(2A - 5B)$



## II. Producto de matrices

### Producto de un Vector Fila por un Vector Columna

Sea  $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]$  un vector fila y  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$  un vector columna. Entonces

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n] \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = r_1 q_1 + r_2 q_2 + \dots + r_n q_n = \sum_{i=1}^n r_i q_i$$

### Ejemplo

$$[-2 \ 1 \ -3] \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = (-2)(-5) + (1)(-2) + (-3)(-3) = 10 + -2 + 9 = 17$$

Nota: El producto de un vector fila por un vector columna da como resultado un escalar.

### Producto de Matrices

Sean las matrices  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  y  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , entonces el producto  $AB = C = (c_{ij})_{m \times p}$ ,

en donde

$$c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Es decir,

$$c_{ij} = (\text{Fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{Columna } j \text{ de } B)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} A & B \\ (m \times n) & (n \times p) \\ C \\ m \times p \end{matrix}}$$

Nota: En el producto  $AB$ , el número de columnas de  $A$  debe ser igual al número de filas de  $B$ , para que el producto esté definido.

### Ejemplos

1. Dadas las matrices  $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , hallar:

a)  $AB$

b).  $BA$

Solución:

a)  $A_{(3 \times 2)}$  y  $B_{(2 \times 3)}$ . Número de columnas de  $A$  = Número de filas de  $B$  = 2, por lo tanto el producto  $AB$  está definido, y  $AB$  es una matriz de tamaño  $3 \times 3$ .

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = [\text{Fila } 1 \text{ de } A] \cdot [\text{Columna } 1 \text{ de } B] = [-3 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = (-3)(0) + (4)(5) = 0 + 20 = \boxed{20}$$

$$c_{12} = [\text{Fila } 1 \text{ de } A] \cdot [\text{Columna } 2 \text{ de } B] = [-3 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = (-3)(3) + (4)(1) = -9 + 4 = \boxed{-5}$$

$$c_{13} = [\text{Fila } 1 \text{ de } A] \cdot [\text{Columna } 3 \text{ de } B] = [-3 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-3)(4) + (4)(-2) = -12 + -8 = \boxed{-20}$$

$$c_{21} = [\text{Fila } 2 \text{ de } A] \cdot [\text{Columna } 1 \text{ de } B] = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = (1)(0) + (0)(5) = 0 + 0 = \boxed{0}$$

$$c_{22} = [\text{Fila 2 de } A] \cdot [\text{Columna 2 de } B] = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = (1)(3) + (0)(1) = 3 + 0 = \boxed{3}$$

$$c_{23} = [\text{Fila 2 de } A] \cdot [\text{Columna 3 de } B] = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (1)(4) + (0)(-2) = 4 + 0 = \boxed{4}$$

$$c_{31} = [\text{Fila 3 de } A] \cdot [\text{Columna 1 de } B] = [-1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = (-1)(0) + (2)(5) = 0 + 10 = \boxed{10}$$

$$c_{32} = [\text{Fila 3 de } A] \cdot [\text{Columna 2 de } B] = [-1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)(3) + (2)(1) = -3 + 2 = \boxed{-1}$$

$$c_{33} = [\text{Fila 3 de } A] \cdot [\text{Columna 3 de } B] = [-1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)(4) + (2)(-2) = -4 + -4 = \boxed{-8}$$

$$\text{Por lo tanto, } AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -5 & -20 \\ 0 & 3 & 4 \\ 10 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

b)  $B_{(2 \times 3)}$  y  $A_{(3 \times 2)}$ . Número de columnas de  $B$  = Número de filas de  $A$  = 3, por lo tanto el producto  $BA$  está definido y  $BA$  es una matriz de tamaño  $2 \times 2$ .

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0 \cdot -3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot -1) & (0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2) \\ (5 \cdot -3 + 1 \cdot 1 + -2 \cdot -1) & (5 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + -2 \cdot 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo se puede observar claramente que los productos  $AB$  y  $BA$  son distintos.

Nota: El producto de matrices **no** es conmutativo. Es decir, en general,  $AB \neq BA$ .

2. Una compañía fabrica tres clases de productos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Los gastos de producción se dividen en las siguientes tres categorías de costo: costo de materiales, mano de obra y otros gastos.

La tabla I presenta un estimado del costo de producir un solo artículo de cada clase.

La tabla II presenta un estimado de la cantidad de artículos de cada clase que se podrían producir en cada estación del año.

La compañía desea presentar en su reunión de accionistas, una tabla sencilla que muestre los costos totales por estación, para cada una de las tres categorías de costo.

**TABLA I – Costos de producción por artículo**

	A	B	C
Costo de materiales	0.20	0.40	0.25
Mano de obra	0.40	0.50	0.35
Otros gastos	0.20	0.30	0.25

**TABLAII – Cantidad de artículos producidos por estación**

	Verano	Otoño	Invierno	Primavera
A	5000	5500	5500	5000
B	3000	3600	3400	3200
C	6800	7200	7000	7000

*Solución:*

Se pueden representar los datos contenidos en cada tabla usando matrices.

Sea  $A$  la matriz que representa los costos de producción por artículo (Tabla I), y sea  $B$  la matriz que representa la cantidad de artículos de cada clase producidos por estación (Tabla II). Así,

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.40 & 0.25 \\ 0.40 & 0.50 & 0.35 \\ 0.20 & 0.30 & 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5000 & 5500 & 5500 & 5000 \\ 3000 & 3600 & 3400 & 3200 \\ 6800 & 7200 & 7000 & 7000 \end{bmatrix}$$

$AB$  es una matriz de tamaño  $3 \times 4$ .

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

$c_{11}$  representa el costo de materiales durante la producción de verano.

$$c_{11} = (0.20)(5000) + (0.40)(3000) + (0.25)(6800) = 3900$$

$c_{21}$  representa el costo de la mano de obra durante la producción de verano.

$$c_{21} = (0.40)(5000) + (0.50)(3000) + (0.35)(6800) = 5880$$

$c_{31}$  representa el costo generado por otros gastos durante la producción de verano.

$$c_{31} = (0.20)(5000) + (0.30)(3000) + (0.25)(6800) = 3600$$

Por lo tanto, la primera columna del producto  $AB$ , representa los gastos de producción durante el verano.

Análogamente, la segunda columna de  $AB$  representa los gastos de producción durante el otoño.

$$c_{12} = (0.20)(5500) + (0.40)(3600) + (0.25)(7200) = 4340$$

$$c_{22} = (0.40)(5500) + (0.50)(3600) + (0.35)(7200) = 6520$$

$$c_{32} = (0.20)(5500) + (0.30)(3600) + (0.25)(7200) = 3980$$

La tercera columna de  $AB$  representa los gastos de producción durante el invierno, y la cuarta columna representa los gastos de producción durante la primavera.

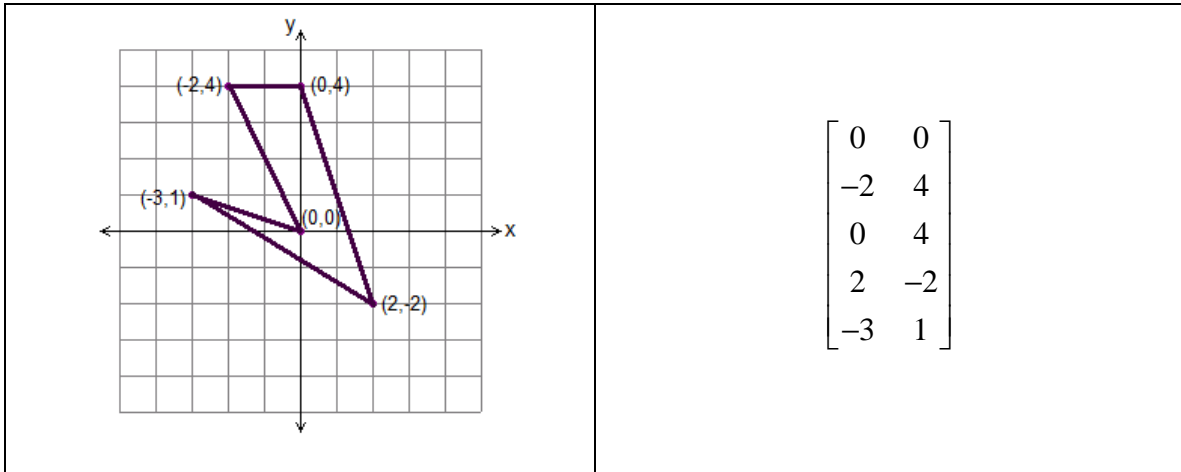
$$AB = \begin{bmatrix} 3900 & 4340 & 4210 & 4030 \\ 5880 & 6520 & 6350 & 6050 \\ 3600 & 3980 & 3870 & 3710 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la tabla que la compañía presentará en su reunión de accionistas es la siguiente:

	<i>Verano</i>	<i>Otoño</i>	<i>Invierno</i>	<i>Primavera</i>	<i>Anual</i>
<i>Costo de materiales</i>	3,900	4,340	4,210	4,030	16,480
<i>Mano de obra</i>	5,880	6,520	6,350	6,050	24,800
<i>Otros costos</i>	3,600	3,980	3,870	3,710	15,160
<i>Costo total de producción</i>	<u>13,380</u>	<u>14,840</u>	<u>14,430</u>	<u>13,790</u>	<u>56,440</u>

Un área de aplicación del álgebra de matrices, son las gráficas por computadora, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

3. Un objeto en un sistema de coordenadas puede ser representado por una matriz que contiene las coordenadas de cada punto esquina. Por ejemplo, a continuación se dá una figura en el plano y la matriz que la representa.



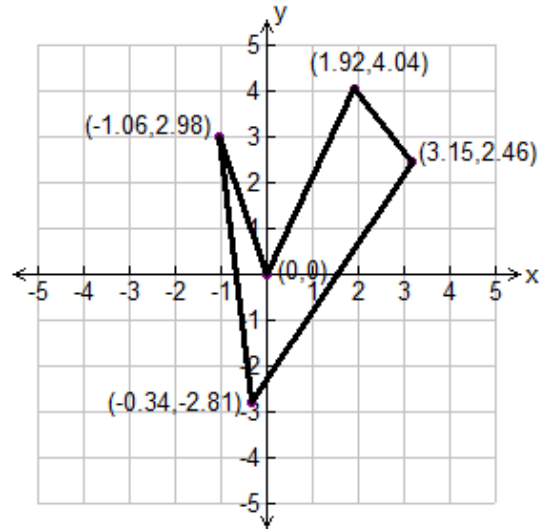
En gráficas por computadora generalmente se muestran los objetos rotando en el espacio. La rotación se hace multiplicando la matriz de las coordenadas por la matriz de rotación.

La matriz de rotación es  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ . Esta matriz rota la figura un ángulo  $\theta$ , a favor

de las manecillas del reloj. En nuestro ejemplo, sea  $\theta = 52^\circ$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 52^\circ & -\text{sen} 52^\circ \\ \text{sen} 52^\circ & \cos 52^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.92 & 4.04 \\ 3.15 & 2.46 \\ -0.34 & -2.81 \\ -1.06 & 2.98 \end{bmatrix}$$

La última matriz contiene las coordenadas de los puntos esquina de la figura rotada  $52^\circ$  a favor de las manecillas del reloj. La figura rotada es



### ***Propiedades del Producto de Matrices***

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices, y  $k$  un escalar. Entonces

a.  $A(BC) = (AB)C$  (Propiedad asociativa)

b. Propiedad distributiva

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

c.  $k(AB) = (kA)B$

siempre y cuando todos los productos estén definidos.

d. Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas de orden  $n$ , entonces

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

### ***Definición***

La matriz identidad de orden  $n$ , denotada por  $I_n$ , es la matriz cuadrada  $n \times n$  definida

por

$$I_n = (\delta_{ij}) \quad \text{donde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Es decir, la matriz identidad, tiene “unos” en la diagonal y ceros fuera de la diagonal principal.

Ejemplos:

$$1. I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

***Potencias Enteras Positivas de una Matriz Cuadrada***

Si  $A$  es una matriz cuadrada y  $k$  es un entero positivo, entonces

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ veces}} \quad \text{y} \quad A^0 = I$$

en donde  $I$  es la matriz identidad del mismo orden de la matriz  $A$ .

Ejemplos:

1. Dada  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , hallar:

a)  $A^0$

b).  $A^2$

c)  $A^3$

d).  $A^4$



*Solución*

$$\text{a) } A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En general, se tiene que  $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , en donde  $n$  es un entero positivo.

2. En un pequeño pueblo el 30% de los hombres casados se divorcian cada año y el 20% de los hombres solteros se casan cada año. Hay 8,000 hombres casados y 2,000 hombres solteros. Suponiendo que la población de hombres permanece constante, cuántos hombres casados y cuántos solteros habrá dentro de un año?. ¿ Cuántos habrá después de dos años?

*Solución*

Se puede organizar la información en una matriz  $A$  en donde la primera fila contiene los por cientos de hombres casados después de un año, y la segunda fila contiene los por cientos de hombres solteros después de un año.

Si 30% se divorcian, entonces 70% permanecen casados.

$$A = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Sea  $\mathbf{x}$  un vector columna cuyo primer elemento es el total de hombres casados y su segundo elemento es el total de hombres solteros después de un año.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8,000 \\ 2,000 \end{bmatrix}$$

Al hacer el producto  $A\mathbf{x}$ , se obtiene

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8,000 \\ 2,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.70)(8,000) + (0.20)(2,000) \\ (0.30)(8,000) + (0.80)(2,000) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,000 \\ 4,000 \end{bmatrix}$$

Después de un año habrá 6,000 hombres casados y 4,000 hombres solteros.

Para saber cuántos hombres casados y cuántos solteros habrá dentro de dos años se debe computar  $A(A\mathbf{x})$ .

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,000 \\ 4,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,000 \\ 5,000 \end{bmatrix}$$

Después de dos años la mitad de los hombres estarán casados y la otra mitad solteros.

En general, el cómputo  $A^n\mathbf{x}$  dará el número de hombres casados y el número de hombres solteros después de  $n$  años.

### ***Polinomios de Matrices***

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ , y sea  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$  un polinomio cualquiera, en donde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  son escalares.

Se define  $f(A)$  como la matriz

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_mA^m$$

Es decir,  $f(A)$  se obtiene sustituyendo la matriz  $A$  en el lugar de la variable  $x$  y la matriz  $a_0I$  en el lugar del escalar  $a_0$ .

#### ***Ejemplo:***

Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  y el polinomio  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 5$ , hallar  $f(A)$ .

*Solución*

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$f(A) = 2A^3 - A^2 + 2A + 5I$$

$$f(A) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 27 & -19 \end{bmatrix}$$

Nota

Sea  $A$  una matriz cuadrada y  $f(x)$  un polinomio cualquiera.

Si  $f(A) = O$ , entonces la matriz  $A$  es una raíz o cero del polinomio  $f(x)$ .

Ejemplo:

Mostrar que la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  es una raíz o cero del polinomio  $f(x) = x^2 - 5x - 2$ .

*Solución*

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$f(A) = A^2 - 5A - 2I$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,  $A$  es un cero o raíz de  $f(x)$ .

Teorema

Sean  $f$  y  $g$  polinomios, y sea  $A$  una matriz cuadrada. Entonces

i)  $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$

ii)  $(fg)(A) = f(A)g(A)$

iii)  $(kf)(A) = kf(A)$ , en donde  $k$  es un escalar.

iv)  $f(A)g(A) = g(A)f(A)$

EJERCICIOS – PARTE II

1) Si  $m \times n$  denota el tamaño de una matriz, hallar el tamaño de aquellas matrices producto que estén definidas.

a)  $(2 \times 3)(3 \times 4)$     b)  $(1 \times 2)(3 \times 1)$     c)  $(4 \times 4)(3 \times 3)$     d)  $(2 \times 2)(2 \times 4)$

2) Si  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ , hallar

a)  $AB$

b)  $BA$

3) Calcular cada uno de los siguientes productos

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$     d)  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4) Computar  $3 \left( \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

5) Mostrar que para las matrices  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ ,  $AB = BA$  para todo

valor de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

6) Dada  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , hallar

a)  $A^2$

b)  $A^3$

c) ¿Cuál será el resultado de  $A^n$ , para  $n$  entero positivo?

7) Una tienda de mascotas tiene 6 gatitos, 10 perritos y 7 cotorras en inventario. Si el valor de cada gatito vale \$55, cada perrito \$150 y cada cotorra \$35, hallar el valor total del inventario de la tienda, usando multiplicación de matrices.

8) Un constructor acepta una orden para construir 5 casas tipo  $A$ , 7 casas tipo  $B$  y 12 casas tipo  $C$ .

Las materias primas usadas en cada tipo de casa son aluminio, madera, vidrio, pintura y mano de obra. La siguiente matriz  $M$  da el número de unidades de cada materia prima usadas en cada tipo de casa.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} alum. & mad. & vidr. & pint. & obra \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Use producto de matrices para determinar la cantidad de unidades de cada clase de materia prima que necesitará el constructor para cumplir con su orden.

9) Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  y los polinomios  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 7$  y

$g(x) = x^2 - 6x + 13$ , hallar

a)  $f(A)$

b) Mostrar que la matriz  $A$  es un cero o raíz del polinomio  $g(x)$ .

10) Si  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , hallar

- a)  $AB$
- b)  $BA$
- c)  $tr(AB)$
- d)  $tr(BA)$

### III. Transpuesta de una Matriz - Tipos de Matrices Cuadradas

#### *Definición*

Sea  $A_{m \times n}$  una matriz. La *matriz transpuesta* de  $A$ , es la matriz  $B_{n \times m}$  definida por

$$b_{ji} = a_{ij} \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad \text{y } i = 1, \dots, m$$

La transpuesta de  $A$  se denota por  $A^T$ .

Es decir, que las filas de  $A$  pasan a ser las correspondientes columnas de  $A^T$ .

#### Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

#### *Propiedades para la transpuesta de una matriz*

- a.  $(A^T)^T = A$
- b.  $(kA)^T = kA^T$ ,  $k$  escalar
- c.  $(A+B)^T = A^T + B^T$
- d.  $(AB)^T = B^T A^T$

Siempre y cuando las operaciones indicadas se puedan realizar.

- e. Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces

$$tr(A) = tr(A^T)$$

Es decir, la traza de una matriz cuadrada es igual a la traza de su transpuesta.

## ***Tipos de Matrices Cuadradas***

### ***a. Matriz Simétrica***

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .  $A$  es *simétrica* si  $A^T = A$ .

#### ***Ejemplo:***

1.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

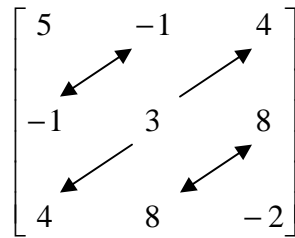
Por lo tanto,  $A$  es una matriz simétrica.

#### ***Observación:***

En una matriz simétrica  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i$  y todo  $j$ .

Esto significa que los elementos de una matriz simétrica son simétricos respecto a la diagonal de la matriz.

Así, en el ejemplo anterior tenemos


$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

The diagram shows a 3x3 matrix with elements 5, -1, 4 in the first row; -1, 3, 8 in the second row; and 4, 8, -2 in the third row. Arrows point from the off-diagonal elements to their symmetric counterparts across the main diagonal: from (1,2) to (2,1), from (1,3) to (3,1), and from (2,3) to (3,2).

2. Un ejemplo del uso de las matrices simétricas aparece en la geometría de distancia.

Si  $R^{n \times n}$  es el espacio de las matrices cuadradas de orden  $n$ , con entradas reales y  $R^r$  es el espacio de  $r$  dimensiones, entonces, una matriz simétrica  $D = (d_{ij}^2) \in R^{n \times n}$  cuyas entradas son no negativas y que tiene ceros en la diagonal, se denomina una *matriz de predistancia*. Si existen  $n$  puntos  $p_1, \dots, p_n$  en  $R^r$  tal que  $d_{ij}^2 = \|p_i - p_j\|^2$ , entonces  $D$  es una *matriz de distancia euclidiana*.

$(\|p_i - p_j\|^2)$  representa el cuadrado de la distancia entre los puntos  $p_i$  y  $p_j$ ).

La Geometría de Distancia, es un método usado para determinar conformaciones moleculares en tres dimensiones. Los datos experimentales consisten de distancias estimadas entre los átomos de una molécula. Estas distancias son provistas por Resonancia Magnética Nuclear, técnica que se ha usado para obtener información estructural de variada complejidad y sofisticación.

El problema matemático consiste en determinar si es posible establecer una configuración de puntos cuya matriz de distancia sea similar, o en otras palabras muy próxima a los datos de distancia dados por la Resonancia Magnética Nuclear.

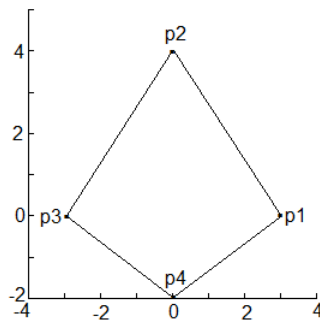
En este proceso de hallar las distancias estimadas, puede suceder que:

a) Si las distancias estimadas son suficientemente precisas, entonces se puede escribir la matriz de distancia de la configuración, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Para una configuración de cuatro puntos, la correspondiente matriz de distancia es

$D = (d_{ij}^2)$ , en donde

$d_{ij}^2 = \text{cuadrado de la distancia entre el punto } p_i \text{ y el punto } p_j$ .



$$d_{12}^2 = d_{21}^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$d_{13}^2 = d_{31}^2 = 6^2 = 36$$

$$d_{14}^2 = d_{41}^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$d_{23}^2 = d_{32}^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$d_{24}^2 = d_{42}^2 = 6^2 = 36$$

$$d_{34}^2 = d_{43}^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$



Por lo tanto, la correspondiente matriz de distancia es

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 36 & 13 \\ 25 & 0 & 25 & 36 \\ 36 & 25 & 0 & 13 \\ 13 & 36 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Si algunas distancias estimadas son muy imprecisas, entonces en la matriz de predistancia de la configuración ellas aparecen representadas por variables.

Por ejemplo, una configuración de cuatro puntos en la cual

$$x = d_{13} = d_{31} = \text{distancia de } p1 \text{ a } p3 \text{ y}$$

$$y = d_{24} = d_{42} = \text{distancia de } p2 \text{ a } p4$$

son imprecisas, podría estar representada por la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & x & 2 \\ 1 & 0 & 3 & y \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 2 & y & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso se debe determinar si la matriz se puede completar, es decir, si se pueden hallar valores para  $x$  y  $y$ , que representen la configuración. Si tales valores existen, entonces la matriz se convierte en una matriz de distancia.

### b. Matriz Diagonal

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada.  $A$  es una *matriz diagonal* si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para todo } i \neq j$$

Es decir, todos los elementos por fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ son matrices diagonales.}$$

c. Matriz Triangular Superior

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada.  $A$  es una matriz *triangular superior* si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i > j$$

Es decir, todos los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & -2 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 \end{bmatrix} \text{ es triangular superior.}$$

d. Matriz Triangular Inferior

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada.  $A$  es una matriz *triangular inferior* si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i < j$$

Es decir, todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 3 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ -2 & 4 & 1 & \boxed{0} \\ 5 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ es triangular inferior.}$$

e. Matriz Triangular

Una matriz que es triangular superior o triangular inferior, se llama *matriz triangular*.

Observación

Una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

### EJERCICIOS – PARTE III

1) Dadas las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  y  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , hallar

a)  $A^T A$

b)  $(2B)^T$

c)  $(AC)^T$

d)  $(BA^T)^T$

e)  $A + C^T$

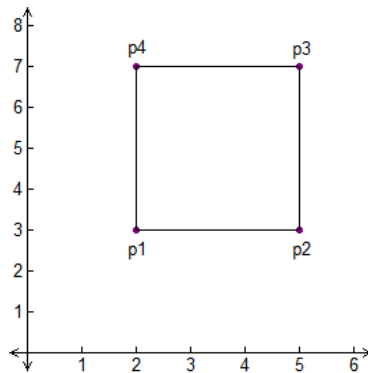
f)  $C^T - A$

2) Clasificar cada una de las siguientes matrices cuadradas como simétrica, triangular superior, triangular inferior, diagonal o ninguna de las anteriores.

a)  $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$       d)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$       f)  $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$       g)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

3) Construir la matriz de distancia para la siguiente configuración de puntos



#### IV. La Inversa de una Matriz

##### Definición

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .  $A$  es una matriz *no singular* o *invertible* si existe una matriz  $B$  tal que  $AB = BA = I$ . La matriz  $B$  se llama la *matriz inversa* de  $A$ .

##### Ejemplo:

Las matrices  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$  son inversas entre sí, ya que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{7} + \frac{8}{7}\right) & \left(\frac{2}{7} + -\frac{2}{7}\right) \\ \left(-\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\right) & \left(\frac{8}{7} + -\frac{1}{7}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y también

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{7} + \frac{8}{7}\right) & \left(-\frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) \\ \left(\frac{4}{7} + -\frac{4}{7}\right) & \left(\frac{8}{7} + -\frac{1}{7}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Notación

Si  $A$  es una matriz no singular, entonces su inversa se denota por  $A^{-1}$ .

### Unicidad de la Inversa

Si una matriz  $A$  es no singular o invertible, entonces su inversa es única.

#### *Demostración*

Supongamos que  $B$  y  $C$  son ambas matrices inversas de  $A$ . Entonces

$$AB = BA = I \quad \text{y} \quad AC = CA = I.$$

$$\text{Además, } B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Es decir,  $B = C$ , por lo tanto la inversa de una matriz no singular es única.

### **Definición**

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .  $A$  es *singular* o *no invertible* si  $A$  no tiene inversa.

#### Ejemplo:

Mostrar que la matriz  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  es singular (no invertible).

#### *Solución*

Supongamos que su inversa existe y es la matriz  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ . Entonces se debería

satisfacer que  $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , pero

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2b_{11} + 3b_{12}) & 0 \\ (2b_{21} + 3b_{22}) & \boxed{0} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El elemento de la posición (2,1) es cero y debería ser uno. Por lo tanto, la inversa de

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  no existe, es decir que la matriz es singular.

### Teorema

Si  $A$  y  $B$  son matrices no singulares  $n \times n$ , entonces  $AB$  es no singular y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

### Demostración

Hay que probar que

$$a) (B^{-1}A^{-1})(AB) = I \quad \text{y} \quad b) (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I.$$

Así, aplicando propiedad asociativa y definición de inversa, se tiene

$$a) (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

y

$$b) (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Por lo tanto,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

### Observación

En general es cierto que si  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k$  son matrices no singulares  $n \times n$ , entonces

el producto  $A_1A_2 \dots A_{k-1}A_k$  es no singular y  $(A_1A_2 \dots A_{k-1}A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$ .

### La Inversa de la Transpuesta de una Matriz

Si  $A$  es una matriz cuadrada no singular, entonces  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

### Demostración

Aplicando la propiedad de la transpuesta de un producto, se tiene que

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I \quad \text{y}$$

$$(A^{-1})^T(A^T) = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

Por lo tanto,  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

### **Operaciones Elementales entre las Filas de una Matriz**

Hay tres tipos de operaciones que se pueden realizar sobre las filas de una matriz, llamadas *operaciones elementales*, las cuales van a ser utilizadas en el procedimiento para hallar la inversa de una matriz no singular. Estos tipos de operaciones son:

### Operaciones Elementales de Tipo I

Intercambiar dos filas de una matriz. Se denota por  $F_i \leftrightarrow F_j$ , lo cual significa intercambiar la fila  $i$  y la fila  $j$ .

Es decir, la fila  $i$  pasa al lugar de la fila  $j$ , y viceversa.

#### Ejemplo:

$$\text{Dada } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

### Operaciones Elementales de Tipo II

Multiplicar cada elemento de una fila por un escalar  $k \neq 0$ . Se denota por

$$kF_i \rightarrow F_i \quad (k \neq 0)$$

Significa que cada elemento de la fila  $i$  se multiplica por  $k \neq 0$  y esta nueva fila sustituye a la fila  $i$ .

#### Ejemplo:

Si sobre la matriz  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$  se va a hacer  $-2F_2 \rightarrow F_2$ , la nueva  $F_2$  será

$$F_2 \rightarrow (-2)(1) \quad (-2)(5) \quad (-2)(3)$$

$$F_2 \rightarrow -2 \quad -10 \quad -6$$

y la matriz que se obtiene es  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & -10 & -6 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ .

### Operaciones Elementales de Tipo III

Sumar  $k$  veces la fila  $i$  a la fila  $j$ . Se denota por  $(kF_i + F_j) \rightarrow F_j$ , para  $k \neq 0$ . Significa que cada elemento de la fila  $i$  se multiplica por  $k$  y este producto se suma al correspondiente elemento de la fila  $j$ . La fila que cambia es  $F_j$ .

Ejemplo:

Si sobre  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$  se va a hacer  $(-2F_2 + F_1) \rightarrow F_1$ , el proceso es

$$\begin{array}{r} -2F_2 \rightarrow \quad -2 \quad -10 \quad -6 \\ +F_1 \rightarrow \quad \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \quad -6 \quad -4 \end{array}$$

La nueva fila será  $F_1 \rightarrow 0 \quad -6 \quad -4$ , y la matriz que se obtiene es

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

### ***Procedimiento para hallar la inversa de una matriz no singular***

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ , no singular.

Primero, se escribe la matriz ampliada de la forma

$$[A \mid I_n]$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ .

Segundo, se hacen operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada, con el propósito de obtener la matriz  $I_n$  en el lugar en donde está la matriz  $A$ .

Tercero, al terminar el procedimiento anterior, se obtiene una matriz de la forma

$$[I_n \mid B]$$

Entonces,  $B = A^{-1}$ .



Ejemplos:

Hallar la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices no singulares:

1.  $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

*Solución*

Primero se forma la matriz ampliada  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$

Se hacen operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada, consecutivamente, con el propósito de obtener  $I_2$  en el lado izquierdo de la matriz. Cada operación elemental se hace sobre la última matriz obtenida.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{7}F_1 \rightarrow F_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(-5F_1 + F_2) \rightarrow F_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{7F_2 \rightarrow F_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\left(-\frac{4}{7}F_2 + F_1\right) \rightarrow F_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array} \right]$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz  $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  es la matriz  $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ .

2.  $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ .

*Solución*

La matriz ampliada es  $\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -11 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ .

Se hacen operaciones elementales sobre las filas, consecutivamente, empezando en la anterior matriz ampliada, con el propósito de obtener  $I_3$  en el lado izquierdo de la matriz.

Cada operación elemental se hace sobre la última matriz obtenida.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -11 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{11}F_1 \rightarrow F_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$(4F_1 + F_2) \rightarrow F_2 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$(-6F_1 + F_3) \rightarrow F_3 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$-\frac{11}{8}F_2 \rightarrow F_2 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left( \frac{2}{11}F_2 + F_1 \right) \rightarrow F_1 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left(-\frac{1}{11}F_2 + F_3\right) \rightarrow F_3 \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \end{array} \right]$$

$$8F_3 \rightarrow F_3 \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left(\frac{3}{8}F_3 + F_2\right) \rightarrow F_2 \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left(\frac{1}{4}F_3 + F_1\right) \rightarrow F_1 \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

Por lo tanto, la matriz inversa de  $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  es  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ .

Teorema:

Una matriz cuadrada de orden  $n$  es *no singular* (invertible) si y sólo si se puede transformar en la matriz identidad mediante operaciones elementales sobre sus filas.

### Observación

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Si se escribe la matriz ampliada  $[A | I]$  y se aplica el procedimiento para tratar de hallar  $A^{-1}$ , pero **no** es posible formar la matriz  $I$  en el lado izquierdo de la matriz ampliada, entonces significa que  $A$  es singular, es decir que  $A$  no tiene inversa y por lo tanto  $A^{-1}$  no existe.

### Ejemplo:

Hallar la inversa de  $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , si existe.

### Solución

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 3 & 6 & | & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$(-3F_1 + F_2) \rightarrow F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & | & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Debido al  $\boxed{0}$  que aparece en la posición  $(2, 2)$  de la matriz de la izquierda, es imposible obtener la matriz identidad en el lado izquierdo de la matriz ampliada, por lo tanto, la matriz  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$  no tiene inversa.

### Caso Particular

Sea  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  una matriz cuadrada de orden 2.

Si  $(ad - bc) \neq 0$ , entonces  $A$  es no singular y  $A^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ .

Nota: Se puede probar este resultado fácilmente, aplicando el procedimiento para hallar la inversa a la matriz  $A$ .

Ejemplo de Aplicación de la Inversade una Matriz en la Resolución de un Sistema de Ecuaciones Lineales

Un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  variables tiene la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

en donde  $a_{ij}$  y  $b_i$  con  $i=1,\dots,m$  y  $j=1,\dots,n$  son números reales y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables.

Los términos  $b_1, b_2, \dots, b_m$  se llaman términos constantes.

Un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  variables puede ser representado matricialmente por medio de la ecuación matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ es la matriz de los coeficientes,}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ es el vector columna de los términos constantes, y}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ es el vector columna de las variables.}$$

Si  $m = n$ , y si la matriz  $A$  de los coeficientes es no singular, es decir, si  $A^{-1}$  existe, entonces la solución del sistema se obtiene multiplicando a izquierda en ambos lados de la ecuación matricial  $Ax=b$  por  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned}A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\(A^{-1}A)x &= A^{-1}b \\Ix &= A^{-1}b \\x &= A^{-1}b\end{aligned}$$

Ejemplo:

Mostrar que  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  es no singular y hallar su inversa.

*Solución*

$ad - bc = (2)(4) - (1)(3) = 5 \neq 0$ , por lo tanto, la matriz es no singular.

Su inversa es  $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ .

Ejemplo:

Una fábrica de automóviles produce dos modelos,  $A$  y  $B$ . El modelo  $A$  requiere una hora en labores de pintura y  $\frac{1}{2}$  hora en labores de pulido. El modelo  $B$  requiere 1 hora para cada uno de los anteriores procesos. Durante cada hora que la línea de ensamblaje esté operando, hay disponibles 100 horas para labores de pintura y 80 para labores de pulido. ¿Cuántas unidades de cada modelo se pueden producir cada hora si todas las horas disponibles deben ser utilizadas?

### Solución

La información puede ser organizada de la siguiente forma.

	A	B	Total de horas disponibles
<i>Pintura</i>	1	1	100
<i>Pulido</i>	$\frac{1}{2}$	1	80

Sea  $x_1$  = número de unidades del modelo A, que se pueden producir.

$x_2$  = número de unidades del modelo B que se pueden producir.

El problema puede ser representado por el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 = 80 \end{cases}$$

La primera ecuación expresa que el número total de horas utilizado en pintura en el proceso de producción debe ser igual a 100.

La segunda ecuación expresa que el número total de horas usadas en el proceso de producción debe ser igual a 80.

El problema puede ser representado matricialmente por medio de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

en donde  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$  es llamada *matriz de los coeficientes*. Su primera columna está formada

por los coeficientes de  $x_1$  en cada una de las ecuaciones del sistema, y su segunda columna está formada por los coeficientes de  $x_2$  en cada una de las ecuaciones del sistema.

El vector  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  es llamado *el vector columna de las incógnitas*.

El vector  $\begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$  es llamado *el vector columna de los términos constantes*.

Para resolver esta ecuación matricial, debemos multiplicar por la izquierda en ambos

lados de la igualdad por la inversa de la matriz de los coeficientes  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ .

Usando el resultado dado para la inversa de una matriz no singular de orden 2, se obtiene

que la inversa de  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$  es  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Se tiene entonces que

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices,

$$x_1 = 40$$

$$x_2 = 60$$

Por lo tanto, cada hora se pueden producir 40 unidades del modelo *A* y 60 del modelo *B*.

#### EJERCICIOS PARTE – IV

1) Mostrar que las matrices  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$  son inversas entre sí.



2) Hallar la inversa de cada una de las siguientes matrices no singulares.

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & a \end{bmatrix}; a \neq 0$

3) Dada  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ , mostrar que  $A^{-1} = \frac{1}{9}A$ .

4) Mostrar que la matriz  $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$  no tiene inversa.

5). Dado el siguiente sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

a) Escribir el sistema en forma matricial.

b) Resolver la ecuación matricial usando la inversa de la matriz de los coeficientes.

6) Se tienen \$11.30 en 78 monedas de 20 centavos y de 10 centavos. ¿ Cuántas monedas son de 10 centavos y cuántas de 20 centavos?.

## RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

### EJERCICIOS – PARTE I

1) a)  $2 \times 3$     b)  $1 \times 4$     c)  $4 \times 1$

2) a)  $[5 \ -4]$  ,  $[-2 \ 1]$  y  $[0 \ 8]$

b)  $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

3)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

4) a)  $\begin{bmatrix} -4 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 12 & -1 & -4 \\ -5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} 16 & 12 & 4 \\ -8 & 0 & -20 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 24 & -12 & -15 \\ -9 & 6 & 0 \end{bmatrix}$     e)  $\begin{bmatrix} 28 & 1 & -7 \\ -12 & 4 & -15 \end{bmatrix}$     f)  $\begin{bmatrix} -24 & 22 & 22 \\ 8 & -8 & -10 \end{bmatrix}$

5)  $a = 8$ ,  $b = -2$  y  $c = -3$ .

6) 

	<i>I</i>	<i>II</i>
distribuidores	45	75
bujías	1760	1520
imanes	35	35

7) 1.1

8) a)  $\frac{11}{12}$     b)  $\frac{81}{40}$     c)  $-\frac{199}{24}$

### EJERCICIOS – PARTE II

1) a)  $2 \times 4$     b) Producto no definido    c) Producto no definido    d)  $2 \times 4$

2) a)  $AB = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 20 & 10 & -20 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$     b)  $BA = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -17 & 8 \end{bmatrix}$

$$3) \text{ a) } \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \text{b) } [10 \quad -8] \quad \text{c) } [32] \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}.$$

$$4) \begin{bmatrix} 78 & 84 \\ -21 & -12 \end{bmatrix}$$

$$5) AB = \begin{bmatrix} (ac - bd) & (bc + ad) \\ -(ad + bc) & (ac - bd) \end{bmatrix} = BA$$

$$6) \text{ a) } A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{b) } A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{c) } A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7) \$2,075

8) 146 unidades de aluminio, 526 de madera, 260 de vidrio, 158 de pintura y 388 de mano de obra.

$$9) \text{ a) } \begin{bmatrix} -113 & -98 \\ 196 & 83 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } f(A) = A^2 - 6A + 13I = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -24 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$10) \text{ a) } AB = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & 19 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{b) } BA = \begin{bmatrix} 1 & 16 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & 13 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } 0 \quad \text{d) } 0$$

### EJERCICIOS – PARTE III

$$1) \text{ a) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2) a) Triangular superior, triangular inferior, simétrica y diagonal.  
 b) Triangular superior, triangular inferior, simétrica y diagonal.  
 c) Ninguna de las anteriores.  
 d) Simétrica.  
 e) Triangular superior.  
 f) Simétrica.  
 g) Triangular inferior.

$$3) D = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 25 & 16 \\ 9 & 0 & 16 & 25 \\ 25 & 16 & 0 & 9 \\ 16 & 25 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

#### EJERCICIOS – PARTE IV

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) a) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ -1 & \frac{2}{a} \end{bmatrix}$$

$$3) A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$4) \left[ \begin{array}{cc|cc} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \right]$$

$$5) a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \text{ Por lo tanto, } x = \frac{11}{3} \text{ y } y = \frac{2}{3}.$$

6) 35 monedas de 20 centavos y 43 monedas de 10 centavos.

## POSPRUEBA

I. En los ejercicios 1 a 9, seleccione la respuesta correcta.

1) El tamaño de la matriz  $[2 \ 3 \ -1 \ 5]$  es

- a)  $1 \times 4$
- b)  $4 \times 1$
- c)  $4 \times 4$
- d)  $1 \times 1$

2) En la matriz  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ,  $a_{23} + a_{12}$  es igual a

- a) 2
- b) -3
- c) -4
- d) -9

3) Si  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ , entonces  $B - A$  es

a)  $\begin{bmatrix} 13 & -6 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} -13 & 6 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

4) Si  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ , entonces  $(A+B)^T$  es

a)  $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

5) Si  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ , entonces  $2A-3B$  es igual a

a)  $\begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -13 & -15 \\ -14 & -16 \end{bmatrix}$

6) Si  $A$  es una matriz de tamaño  $5 \times 2$  y  $B$  es de tamaño  $3 \times 5$ , entonces el producto

$A^T B^T$  es de tamaño

a)  $2 \times 3$

b)  $3 \times 2$

c)  $2 \times 5$

d)  $5 \times 5$

7) Si  $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$  entonces el producto  $BA$  es

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 15 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -3 & 16 \\ -2 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} -5 & 23 \\ -17 & 26 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 16 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

8) La matriz  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  es

a) Triangular superior

b) Triangular inferior

c) Simétrica

d) Diagonal

9) La inversa de la matriz  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  es

a)  $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$



II. Resuelva el siguiente ejercicio.

Una juguetería vende 52 muñecas, 23 carros y 70 pelotas el día sábado. El día domingo vende 48 muñecas, 30 carros y 74 pelotas. Los precios por unidad de cada uno de los artículos son respectivamente, \$8.50, \$12.30 y \$5.80.

- 1) Escribir una matriz de tamaño  $2 \times 3$  que represente la cantidad de artículos vendidos en los dos días.
- 2) Escribir un vector columna que represente el precio por unidad de cada artículo.
- 3) Hallar el vector columna cuyos elementos muestren los ingresos obtenidos por concepto de ventas los días sábado y domingo respectivamente.

## RESPUESTAS DE LA PREPRUEBA

- I. 1) b
- 2) d
- 3) b
- 4) c
- 5) a
- 6) d
- 7) a
- 8) c
- 9) c

$$\begin{array}{l} \text{II. 1) } \begin{array}{ccc} & \text{hab.} & \text{maiz} & \text{salsa} \\ \text{viernes} & \left[ \begin{array}{ccc} 98 & 75 & 200 \end{array} \right] \\ \text{sábado} & \left[ \begin{array}{ccc} 122 & 90 & 215 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$2) \begin{bmatrix} 1.22 \\ 0.65 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{array}{l} \text{viernes} \rightarrow \left[ \begin{array}{c} 218.31 \end{array} \right] \\ \text{sábado} \rightarrow \left[ \begin{array}{c} 261.09 \end{array} \right] \end{array}$$

## RESPUESTAS DE LA POSPRUEBA

- I. 1) a
- 2) b
- 3) c
- 4) a
- 5) d
- 6) a
- 7) c
- 8) a
- 9) d

$$\text{II. 1) } \begin{array}{l} \text{sábad}o \\ \text{domingo} \end{array} \begin{bmatrix} \text{muñ.} & \text{carr.} & \text{pelot.} \\ 52 & 23 & 70 \\ 48 & 30 & 74 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 8.50 \\ 12.30 \\ 5.80 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{array}{l} \text{sábad}o \rightarrow \\ \text{domingo} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1,130.90 \\ 1,206.20 \end{bmatrix}$$

## REFERENCIAS

1. Elementary Matrix Algebra  
Franz E. Hohn  
Second Edition  
The MacMillan Company, New York, 1965
2. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times  
Morris Kline  
Oxford University Press, 1972
3. Matrices Definidas Positivas  
Esperanza Vélez, 1988
4. Matrices and Linear Algebra  
Hans Schneider/George Phillip Barker  
Second Edition  
Dover Publications, Inc., 1989
5. Condiciones Suficientes para Matrices de Distancia  
Esperanza Vélez, 1994
6. Linear Algebra  
Quick Review  
Jerry Bobrow  
Wiley Publishing, Inc., 1996
7. Beginning Linear Algebra  
Seymour Lipschutz  
McGraw Hill, 1997

8. Linear Algebra with Applications

Seventh Edition

Steven J. Leon

Pearson/ Prentice Hall, 2006

9. Algebra and Trigonometry

Seventh Edition

Michael Sullivan

Prentice Hall, 2006

10. Mathematical Analysis

for Business, Economics, and the Life and Social Sciences

Twelfth Edition

Ernest F. Haeussler, Jr./Richard S. Paul/Richard J. Wood

Prentice Hall, 2008