2.1.- DEFINICION DE LIMITES.

OBJETIVO.- Que el alumno conozca el concepto de Límite, comprenda la importancia que tiene este concepto en el Cálculo y adquiera habilidad en el cálculo de los Límites más comunes.

Como ya indicamos en el artículo anterior, un límite viene a ser una barrera a la que nos podemos aproximar tanto como querramos pero que nunca podremos sobrepasar. A lo más podemos llegar a ella pero superarla NUNCA. En cualquier caso, dado que estamos inmersos en una situación dinámica en la que experimentamos un cambio continuo, y en el proceso nos aproximamos a un límite, entonces, para saber si nos estamos aproximando al o alejándonos del límite o, inclusive, para saber si tal tope es o no un límite, es necesario detener el proceso y analizarlo a partir de la diferencia entre el punto en que nos encontramos y el supuesto valor límite. Esto implica de alguna manera "ver" si cada vez estamos más cerca del supuesto límite y cuantificar que tan cerca estamos de él. Entonces, si tal diferencia disminuye tanto como querramos, es decir, si la podemos hacer cada vez más pequeña, entonces, no hay duda de que nos estamos aproximando al límite y/o que tal tope es en realidad un límite. Por supuesto que esto parte de conocer de antemano el Valor Límite al que nos estamos aproximando.

En realidad, y desde el punto de vista del cálculo, nosotros estamos interesados en estudiar el comportamiento de una cierta función a partir de la variación que experimenta la variable independiente "x". Esto nos debe proporcionar la respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿De que depende la variación de la variable independiente "x"?.
- ¿Cómo se comporta la variación de esta variable independiente "x"?.
- ¿Habrá diferentes tipos de variación?.
- ¿Cómo afecta esta variación a la función correspondiente?.
- ¿Cómo se comporta la variación de esta función?.
- ¿Cuántos tipos de variación puede experimentar esta función?.

Entonces, a partir de tales consideraciones, la definición formal de Límite, desde la óptica del Cálculo, se da en los siguiente términos.

- Sea " f " una función definida en los reales, es decir:

$$f : R \rightarrow R$$

- Sea x_o un punto contenido en un intervalo abierto y que puede pertenecer o no al dominio de la función, es decir:

$$x_o \in D_f \quad ó$$

$$x_o \notin D_f$$

- Y sea "L" un número real arbitrario, es decir:

$$L \in R$$

Se dice que L es el límite de f(x) cuando x tiende a x_o, lo que se indica como:

$$\lim_{x \to xo} f(x) = L$$

Si podemos determinar una $\varepsilon > 0$ (epsilon positiva) suficientemente pequeña en términos tales que ella a su vez determina una $\delta > 0$ (delta positiva) también suficientemente pequeña, tal que:

Si:

$$|x - x_o| < \delta$$

entonces:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Analicemos esta definición:

De antemano supone tener una función definida en los reales; un punto que puede pertenecer o no pertenecer a su dominio y un cierto número real " L " que se supone es el Límite al que se aproxima la función en el proceso de variación originado por el cambio de x hacia el punto x_o. Nada estamos indicando, en realidad aún no es de nuestro interés, cómo proponemos el supuesto real " L ". Por otro lado, la existencia de los número positivos $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ debe quedar asegurada por las desigualdades absolutas indicadas. Estos números deben ser suficientemente pequeños para asegurarnos que a medida que la diferencia entre x y x_o disminuye, (a medida que x se aproxima al punto x_o) entonces la diferencia entre f(x) y L también disminuye (Esto indica que f(x) también se aproxima a L).

Por como definimos nuestras funciones, y dado que x es la variable independiente, entonces, en todos los casos esta variable siempre se aproximará a x_o, puesto que esta es nuestra hipótesis de partida. La gran pregunta es: ¿f(x) también se aproxima a " L " a medida que x lo hace a x_o?. Si en realidad L es el límite de f(x) entonces la pregunta tiene una respuesta afirmativa, en caso contrario la respuesta es negativa.

Por la forma en que está dada esta definición y sobre todo porque presupone el conocimiento del límite L, se dice que ésta es la estrategia empleada para demostrar que un cierto real L es el límite de una función f(x) cuando x se aproxima a x_o. La estrategia consiste en demostrar que cuando la diferencia entre x y x_o se hace cada vez más pequeña, la correspondiente diferencia entre f(x) y el supuesto límite L también disminuye. Finalmente la parte operativa se reduce a encontrar una función que relacione a ε y a δ tal que nos asegure que cuando una disminuye (la δ), entonces la otra (la ε) también lo hace como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo.-

1.- Demuestre que el limite de f(x) = 9x – 6 es L = 3 cuando x tiende a 1.

$$\lim_{x \to 1}(9x - 6) = 3$$

La estrategia consiste en plantear la desigualdad:

$$|x - x_o| < \delta$$

y sustituirla en la desigualdad

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

para encontrar así la función planteada en el párrafo anterior y verificar directamente en ella que la disminución de δ trae como consecuencia la disminución de ε con lo que la demostración queda completa según veremos en seguida.

Como ya dijimos, si:

$$|x - 1| < \delta$$

entonces

$$|f(x) - 3| < \varepsilon$$

sustituyamos la f(x) en la desigualdad anterior y hagamos álgebra buscando SIEMPRE tener en ella términos de la forma $|x - 1|$ lo que nos da:

$$|(9x - 6) - 3| < \varepsilon$$

$$|9x - 9| < \varepsilon$$

$$|9(x - 1)| < \varepsilon$$

$$|9| \cdot |x - 1| < \varepsilon$$

$$9\,|x - 1| < \varepsilon$$

$$9\delta < \varepsilon$$

Ya que, como anotamos al principio:

$$|x - 1| < \delta$$

Por lo tanto, podemos definir la función buscada en términos de:

$$\varepsilon := 9\delta$$

y así demostramos que cuando δ disminuye (Es decir, cuando x se aproxima a 1) entonces ε también lo hace [Es decir, f(x) se aproxima a 3 como límite] como mostramos en las siguientes tablas en las que mostramos tal comportamiento.

$$\varepsilon(\delta) := 9\delta$$

$$\delta := 0.09, 0.08 .. 0.01$$

$\delta =$	$\varepsilon(\delta) =$
0.09	0.81
0.08	0.72
0.07	0.63
0.06	0.54
0.05	0.45
0.04	0.36
0.03	0.27
0.02	0.18
0.01	0.09

Ejemplo No. 2

Demuestre que:

$$\lim_{x \to 0} (x - 4) := -4$$

Procedimiento:

1.- Planteamos la primera desigualdad de la definición

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

es decir:

$$|x - 0| < \delta \rightarrow |x| < \delta$$

2.- Planteamos la segunda desigualdad de la definición y haceamos álgebra en ella:

$$|f(x) - L| > \delta$$

es decir:

$$|x - 4 - (-4)| < \varepsilon$$

$$|x - 4 + 4| < \varepsilon$$

$$|x| < \varepsilon$$

$$\delta < \varepsilon$$

De este resultado podemos platear como función a:

$$\varepsilon = f(\delta)$$

$$\varepsilon(\delta) := 2\delta$$

Resultado que nos asegura que efectivamente al disminuir δ, ε también lo hace por lo que hemos demostrado que:

$$\lim_{x \to 0} (x - 4) := -4$$

$\varepsilon(\delta) := 2\delta$

$\delta := 0.09, 0.08 .. 0.01$

$\delta =$	$\varepsilon(\delta) =$
0.09	0.18
0.08	0.16
0.07	0.14
0.06	0.12
0.05	0.1
0.04	0.08
0.03	0.06
0.02	0.04
0.01	0.02

Ejemplo No. 3

Demuestre que:

$$\lim_{x \to 3}(5x + 2) = 17$$

$$|x - 3| < \delta$$

$$|5x + 2 - 17| < \varepsilon$$

$$|5(x - 3)| < \varepsilon$$

$$5\,|x - 3| < \varepsilon$$

$$5\delta < \varepsilon$$

$$5\delta = \varepsilon$$

$$\delta = 2.999$$

$$3 - 2.999 = 0.011$$

$$\delta = 0.011$$

$$\varepsilon = 0.055$$

Resumen:

1.- ¿ Que es un limite?

- es una aproximación, una tendencia.
- Es un punto al que puede llegar un valor.
- Es un tope, una barrera, algo que no puedes sobrepasar.
- Es una constante, es algo que ya esta establecido.

2.- ¿Qué significa que limite $f(x)_{x \to x0} = L$?

Cuando x esta muy próximo a x_o entonces f(x) se aproxima a L.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) := L$$

3.- Si L no es el límite entonces:

Si δ disminuye ε aumenta

En este caso cuando x se aproxima a x_0 f(x) se aleja de L o no se aproxima a L tanto como querramos, es decir ε no es tan pequeño como querramos.

-

EJERCICIOS 2.1 : Demuestre que los siguientes limites:

1.- $\lim_{x \to 3} x = 3$

2.- $\lim_{x \to -1} x + 6 = 5$

Ejemplos:

Demuestre los siguientes Límites.

1.- $\lim_{x \to 1} 2x^2 + x - 1 = 2$

$|x - 1| < \delta$

$\left|\left(2x^2 + x - 1\right) - 2\right| < \varepsilon$

$\left|2x^2 + x - 3\right| < \varepsilon$

$\left|2\left[(x - 1 + 1)^2\right] + [(x - 1) + 1] - 3\right| < 3$

$\left|2\left[[(x - 1) + 1]^2\right] + [(x - 1) + 1] - 3\right| < \varepsilon$

$\left|2\left[(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1\right] + [(x - 1) + 1] - 3\right| < \varepsilon$

$\left|2(x - 1)^2 + 4(x - 1) + 2 + (x - 1) + 1 - 3\right| < \varepsilon$

$\left|2(x - 1)^2 + 5(x - 1)\right| < \varepsilon$

$2\delta^2 + 5\delta = \varepsilon$

$\varepsilon(\delta) := 2\cdot\delta^2 + 5\delta$

$\delta := 0.09, 0.08 .. 0.01$

$\delta =$	$\varepsilon(\delta) =$
0.09	0.466
0.08	0.413
0.07	0.36
0.06	0.307
0.05	0.255
0.04	0.203
0.03	0.152
0.02	0.101
0.01	0.05

2.- $\lim_{x \to 1} 4x^2 - 2x - 2 = 0$

$|x - 1| < \delta$

$\left|\left(4x^2 - 2x - 2\right) + 0\right| < \varepsilon$

$\left|4x^2 - 2x - 2\right| < \varepsilon$

$\left|4(x - 1 + 1)^2 - 2[(x - 1) + 1] - 2\right| < \varepsilon$

$\left|4\left[(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1\right] - 2[(x - 1) + 1] - 2 < \varepsilon\right|$

$\left|4(x - 1)^2 + 8(x - 1) + 4 - 2(x - 1) - 2 - 2\right| < \varepsilon$

$\left|4(x - 1)^2 + 6(x - 1)\right| < \varepsilon$

$4\delta^2 + 6\delta = \varepsilon$

$\varepsilon(\delta) := 4\cdot\delta^2 + 6\delta$

$\delta := 0.09, 0.08 .. 0.01$

$\delta =$	$\varepsilon(\delta) =$
0.09	0.572
0.08	0.506
0.07	0.44
0.06	0.374
0.05	0.31
0.04	0.246
0.03	0.184
0.02	0.122
0.01	0.06

EJERCICIOS 2.2: De una prueba formal de cada limite propuesto.

1.- $\lim_{x \to 1} 2x^2 - 4x + 2 = 0$

2.- $\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 5\cdot x - 6)}{x - 1} := 7$

2.- $\lim_{x \to 2} \frac{(2x^2 - 3x - 2)}{x - 2} := 5$

3.- $\lim_{x \to 1} \frac{(2x^2 - x - 3)}{x + 1} := -5$

4.- $\lim_{x \to 0} \frac{(3x^2 - 4x)}{x} := -4$

5.- $\lim_{x \to 2} 2x^2 - 4x + 3 := 3$