

Universidad de Puerto Rico Departamento de Matemáticas
MATE 3063 – EXAMEN I – 26 de septiembre 2014

Nombre: _____ Núm. de Estudiante: _____

I) (20 puntos) Identifique la gráfica de la ecuación dada. Las respuestas no se repiten.

i) $x - y^2 - 2z^2 + 2y - 1 = 0$

vi) $y^2 = x^2 + z^2 + 2x - 4z + 20$

ii) $4x^2 + 16z^2 = y^2 + 4y + 16$

vii) $y^2 - x^2 - z^2 = 8x + 6y + 6z + 16$

iii) $x - y^2 + 4z^2 + 8z - 4 = 0$

viii) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

iv) $x^2 + 2x - y = 11$

ix) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 31$

v) $x + 6 = z - y$

x) $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 8x + 6z - 7 = 0$

II) (8 puntos) Encuentre el dominio de las siguientes funciones, haga un boceto de éstas y sus propiedades (abierto, cerrado, acotado, no acotado).

1) $f(x, y) = \sin^{-1}(x^2 + y^2)$

2) $f(x, y) = \ln(1 - x^2) \ln(1 - y^2)$

III) (12 puntos) Determine los siguientes límites.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^4 + y^4}$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| + |y|}{x + y}$

IV) (8 puntos) Demuestre que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ es continua en \mathbb{R}^2 . Explique.

V) (3 puntos) Enuncie el teorema que relaciona la diferenciabilidad una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con sus derivadas parciales.

VI) (5 puntos) Explique porque la función $f(x, y) = \sin^{-1} \left(\frac{1}{xy} \right)$ es diferenciable en $(2, 1)$.

VII) (16 puntos) Para las siguientes funciones, calcule las derivadas parciales indicadas.

i) $f(x, y) = \sec(\sin x + \cos y)$, f_x, f_y

ii) $g(x, y, z) = x^2 y z^2 + y^2 + x z^2$, $g_x(1, -1, 1)$

iii) $\sin yz = e^{xz}, \frac{\partial z}{\partial x}$

iv) $f(x, y) = x^y, f_{xy}(x, y)$

VIII) (5 puntos) Use la siguiente tabla para encontrar $\frac{df}{dt}\bigg|_{t=1}$.

$f(3, -1)$	$x(1)$	$y(1)$	$f_x(3, -1)$	$f_y(3, -1)$	$x'(1)$	$y'(1)$
-1	3	-1	2	-4	6	-2

IX) (5 puntos) Si $z = x^y, x = (u + v)^2, y = \sin uv$, Encuentre $\frac{\partial z}{\partial v}$.

X) (14 puntos) Para $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$ encuentre:

i) la derivada direccional en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en dirección de $\mathbf{u} = \langle 2, -1 \rangle$.

ii) la dirección en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ donde la tasa de cambio es mayor y cuál es.

iii) todas las direcciones en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tal que la tasa de cambio sea $\frac{1}{\sqrt{17}}$.

XI) (6 puntos) Grafique $y^2 - 2y - x^2 - z^2 = 0$