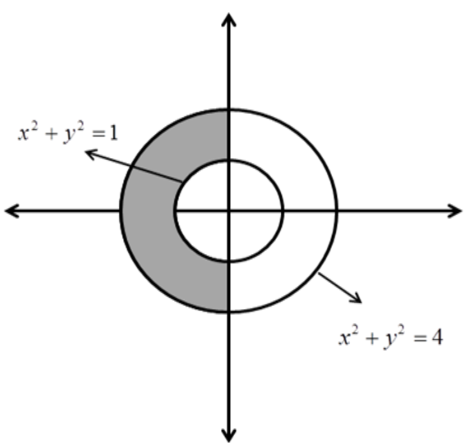
Universidad de Puerto Rico en Bayamón
Departamento de Matemáticas
Mate 3063 – Cálculo III
Tercer Examen Parcial

Nombre ______________________________ # de est. ______________________
Fecha __________________ Sección____________

1) Utilice coordenadas polares para evaluar la doble integral $\iint_R (x+y)\,dA$ si R es la región que yace a la izquierda del eje de y y entre los círculos $x^2+y^2=1$ & $x^2+y^2=4$. (7pts.)

Región de integración R



$$R=\left\{(r,\theta):1\le r\le 2,\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$\iint_R (x+y)\,dA=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_1^2 (r\cos\theta+r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_1^2 (\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)\,r^2\,dr\,d\theta$$

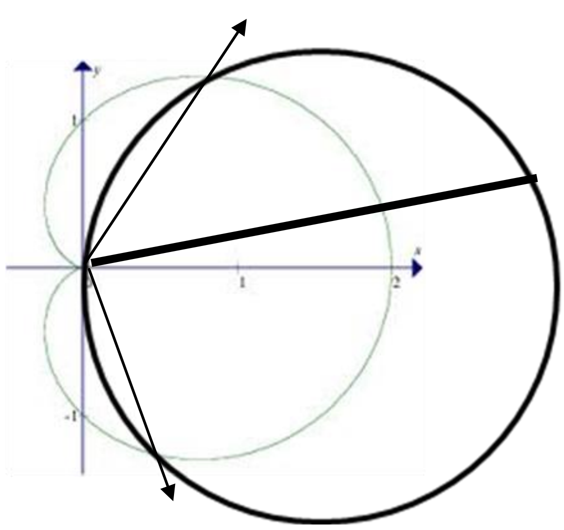
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)\left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 d\theta$$

$$=\frac{7}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{7}{3}\left.(\mathrm{sen}\,\theta-\cos\theta)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$=\frac{7}{3}(-1-1)=\frac{-14}{3}$$

2) Plantee una doble integral que represente el área de la región fuera del cardiode $r=1+\cos\theta$ y dentro del círculo $r=3\cos\theta$. Dibuje la región. (6pts.)



Región de integración

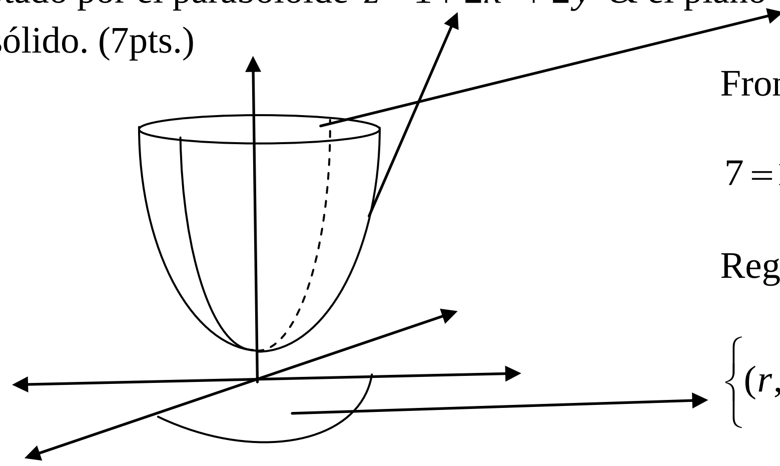
$$1+\cos\theta=3\cos\theta\Rightarrow\frac{1}{2}=\cos\theta$$

$$\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$$

$$\left\{(r,\theta:-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3},1+\cos\theta\le r\le 3\cos\theta\right\}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

3) Plantee una doble integral en coordenadas polares que represente el volumen del sólido acotado por el paraboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ & el plano $z = 7$ en el primer octante. Dibuje el sólido. (7pts.)



Frontera región de integración

$$7 = 1 + 2x^2 + 2y^2 \Rightarrow 3 = x^2 + y^2, \quad x, y \geq 0$$

Región de integración

$$\left\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\iint_D [7 - (1 + 2x^2 + 2y^2)]dA$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} [6 - 2r^2] r\, dr\, d\theta$$

4) Evalúe la triple integral $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y\, dy\, dz\, dx$ (6pts.)

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y\, dy\, dz\, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} x^2 \left[-\cos y \Big|_0^{xz} \right] dz\, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} x^2 \ [-\cos(xz) + 1]\, dz\, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} x^2 \ [-\frac{1}{x}\operatorname{sen}(xz) + z]\Big|_0^{x} dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} x^2 [-\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x^2) + x]\, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} [-x\operatorname{sen}(x^2) + x^3]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\cos(x^2) + \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \left(\frac{1}{2}\cos(\pi) + \frac{\pi^4}{4}\right) - \frac{1}{2} = -1 + \frac{\pi^4}{4}$$

5) Evalúe la triple integral $\iiint_E yz\cos(x^5)dV$ si $E=\{(x,y,z):0\le x\le 1, 0\le y\le x, x\le z\le 2x\}$ (6pts.)

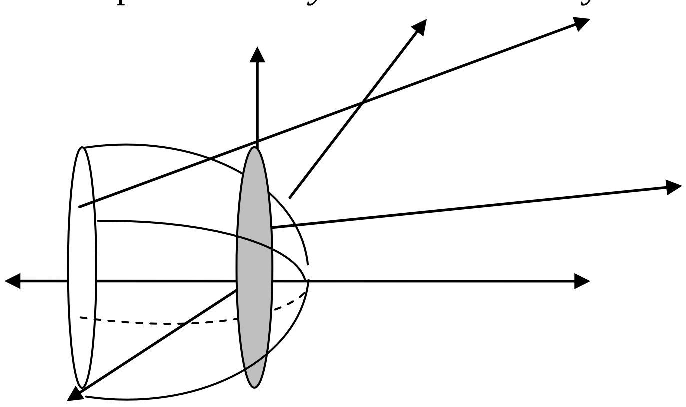
$$\iiint_E yz\cos(x^5)dV=\int_0^1\int_0^x\int_x^{2x} yz\cos(x^5)dzdydx$$

$$=\int_0^1\int_0^x y\cos(x^5)\frac{z^2}{2}\bigg|_x^{2x}dydx=\frac{3}{2}\int_0^1\int_0^x y\cos(x^5)x^2dydx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1 \cos(x^5)x^2\frac{y^2}{2}\bigg|_0^x dx=\frac{3}{4}\int_0^1 x^4\cos(x^5)dx$$

$$=\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{5}\text{sen}(x^5)\bigg|_0^1=\frac{3}{20}\text{sen}(1)$$

6) Utilice una triple integral para determinar el volumen del sólido acotado por el paraboloide $y=-x^2-z^2+1$ & $y=-3$. Dibuje el sólido. (10pts.)



$$-x^2-z^2+1=-3\Rightarrow x^2+z^2=4$$

Región de integración

$$\left\{(x,y,z):-\sqrt{4-x^2}\le z\le\sqrt{4-x^2}, -3\le y\le -x^2-y^2+1, -2\le x\le 2,\right\}$$

En coordenadas rectangulares

$$\iiint_E dV=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-3}^{-x^2-y^2+1}dy\,dz\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}[-x^2-y^2+1-(-3)]dz\,dx$$

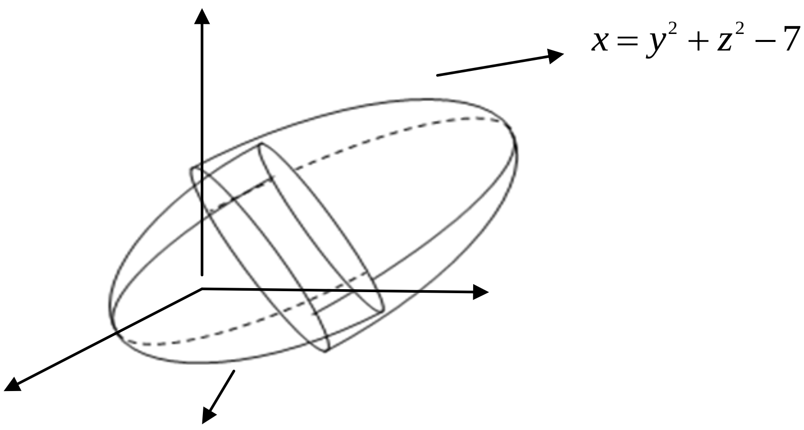
$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}[-x^2-y^2+4]dz\,dx$$

Cambiando a coordenadas polares

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2(-r^2+4)r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2(-r^3+4r)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}(-\frac{r^4}{4}+2r^2)\bigg|_0^2 d\theta$$

$$=4\int_0^{2\pi}d\theta=8\pi$$

7) Plantee la triple integral que representa el volumen del sólido acotado por las superficies $x = y^2 + z^2 - 7$ & $x = -y^2 - z^2 + 1$. Dibuje el sólido. (7pts.)

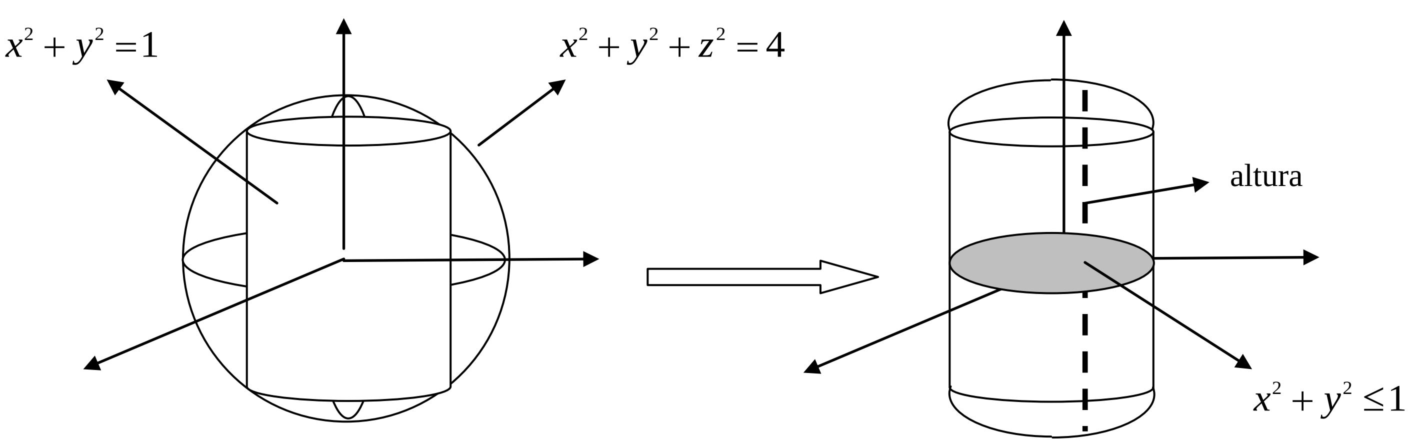


Intersección de superficies

$$y^2 + z^2 - 7 = -y^2 - z^2 + 1 \Rightarrow 2y^2 + 2z^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2y^2 + 2z^2 = 8 \Rightarrow y^2 + z^2 = 4$$

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{y^2+z^2-7}^{-y^2-z^2+1} dx\, dz\, dy$$

8) Utilice coordenadas cilíndricas para plantear la triple integral que representa el volumen del sólido que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Dibuje el sólido. (6pts.)



$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} r\; dz\; dr\; d\theta$$

9) Escriba la ecuación $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ en coordenadas esféricas. (5pts.)

$$x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 - 2(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta) = 0$$

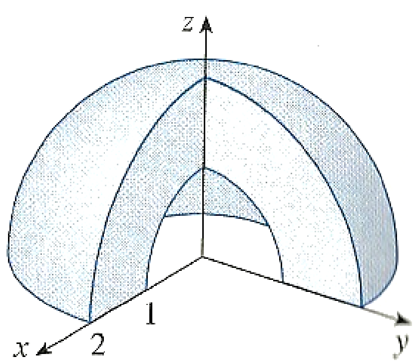
$$\Rightarrow \rho[\rho - 2(\operatorname{sen}\phi \cos\theta)] = 0$$

$$\Rightarrow \rho = 0 \quad ó \quad \rho - 2(\operatorname{sen}\phi \cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \rho = 0 \quad ó \quad \rho = 2\operatorname{sen}\phi \cos\theta$$

$$\Rightarrow \rho = 2\operatorname{sen}\phi \cos\theta$$

10) Plantee en coordenadas esféricas la integral que representa el volumen del sólido representado en la siguiente gráfica. (5pts.)



Sólido se describe en coordenadas esféricas por

$$\left\{(\rho,\theta,\phi):\ 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi,\quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

11) Evalúe la integral $\int_C x\,sen(y)ds$ si C es el segmento de recta desde (0,3) a (4,6).

(7pts.)

Segmento de recta está dado por $y=\frac{3}{4}x+3,\ 0\le x\le 4$ el cual parametrizamos por

$$\begin{cases} x=t \\ y=\frac{3}{4}t+3 \end{cases},\ 0\le t\le 4 \qquad \text{por lo tanto} \qquad \begin{matrix} dx=1 \\ dy=\frac{3}{4} \end{matrix}$$

$$\int_C x\,sen(y)ds=\int_0^4 tsen\left(\frac{3}{4}t+3\right)\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\ dt$$

$$=\frac{5}{4}\int_0^4 tsen\left(\frac{3}{4}t+3\right)\ dt$$

Integración por partes : $u=t,\ dv=\text{sen}\left(\frac{3}{4}t+3\right)\Rightarrow du=dt,\ v=-\frac{4}{3}\cos\left(\frac{3}{4}t+3\right)$

$$=\frac{5}{4}\left[\frac{-4t}{3}\cos\left(\frac{3}{4}t+3\right)\Big|_0^4-\frac{4}{3}\int_0^4-\cos\left(\frac{3}{4}t+3\right)dt\right]$$

$$=\frac{5}{4}\left[\frac{-16}{3}\cos(6)+\frac{4}{3}\bullet\frac{4}{3}\text{sen}\left(\frac{3}{4}t+3\right)\Big|_0^4\right]$$

$$=\frac{-20}{3}\cos(6)+\frac{20}{9}\left[\text{sen}(6)-\text{sen}(3)\right]$$

12) Evalúe la integral $\int_C \text{sen}(x)dx+\cos(y)dy$ si C consiste de la parte superior del círculo $x^2+y^2=4$. (7pts.)

La parametrización de C esta dada por : $x=2\cos t,\ y=2\text{sent},\ 0\le t\le\pi$ por lo tanto $dx=-2\text{sen}\,t\,dt,\ dy=2\cos t\,dt$

$$\int_C \text{sen}(x)dx+\cos(y)dy=\int_0^\pi \text{sen}(2\text{cost})(-2\text{sen }t)dt+\cos(2\text{sen}t)(2\cos t)dt$$

$$=[-\cos(2\cos t)+\text{sen}(2\text{sent})]\Big|_0^\pi$$

$$=[-\cos(-2)-(-\cos(2))]$$

$$=[-\cos(2)+(\cos(2))]=0$$

13) Evalúe la integral $\int_C F \bullet dr$ donde $F(x,y)=(x^2)i-(xy)\,j$ y C esta descrita por

$\overrightarrow{r(t)}=(\cos t)i+(\text{sen}t)\,j, 0\le t\le \frac{\pi}{2}$. (7pts.)

Necesitamos determinar $F(\overrightarrow{r(t)})$ y $\overrightarrow{r'(t)}$

$$F(\overrightarrow{r(t)})=(\cos t)^2 i-(\cos t)(\text{sen } t)\,j \qquad \overrightarrow{r'(t)}=(-\text{sen } t)i+(\cos t)\,j$$

$$\int_C F\bullet dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\overrightarrow{r(t)})\bullet\overrightarrow{r'(t)}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-(\text{sen } t)\cos^2 t-(\text{sen } t)\cos^2 t]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-2\,\text{sen } t\cos^2 t\; dt$$

$$=\left.\frac{2\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

14) Utilice el Teorema fundamental de la integral de línea para evaluar $\int_C F\bullet dr$ si

$F(x,y)=\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)i-(2y\tan^{-1}(x))\,j$ y C está descrita por $\overrightarrow{r(t)}=(t^2)i+(2t)\,j, 0\le t\le 1$.

(7pts.)

La curva comienza C en el punto (0,0) y termina (1,2).
Necesitamos determinar la función potencial para el campo vectorial
$F(x,y)=\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)i-(2y\tan^{-1}(x))\,j$ buscamos una $f(x,y)$ tal que $f_x(x,y)=\frac{y^2}{1+x^2}$
y $f_y(x,y)=2y\tan^{-1}x$.

$$f_x(x,y)=\frac{y^2}{1+x^2}\Rightarrow f(x,y)=\int\frac{y^2}{1+x^2}dx=y^2\tan^{-1}x+g(y)$$

$$f_y(x,y)=2y\tan^{-1}x+g'(y)\Rightarrow 2y\tan^{-1}x+g'(y)=2y\tan^{-1}x$$

Entonces

$$\Rightarrow 0=g'(y)\Rightarrow c=g(y)\Rightarrow f(x,y)=2y\tan^{-1}x+c$$

$$\int_C F\bullet dr=\left.f(x,y)\right|_{(0,0)}^{(1,2)}=4\tan^{-1}1-0=\pi$$