Universidad de Puerto Rico en Bayamón
Departamento de Matemáticas
Mate3063
Primer Examen

Nombre______CLAVE__________________ # de est. ____________________

Fecha ________________ Sección_________

I. Las ecuaciones en la columna de la izquierda representan superficies en el espacio cartesiano. Paree cada una de estas ecuaciones con alguna de las alternativas en la segunda columna. No repita alternativas. (2pts.c/u)

__f__1) $3(x-4)^2+(y+7)^2+(z-5)^2=1$

__j__2) $2x^2+y^2-z=0$

__e__3) $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=1$

__l__4) $y=2$

__c__5) $-5x+y-3z=0$

__g__6) $(x-3)^2-(y-3)^2+\frac{z^2}{9}=1$

__i__7) $9x^2+4y^2=z^2$

__m__8) $5x+6y=0$

__h__9) $(y+1)^2+\frac{z^2}{4}+1=\frac{(x+2)^2}{16}$

__d__10) $x^2+(z-2)^2=1$

a. un punto

b. una recta

c. un plano

d. un cilindro

e. una esfera

f. un elipsoide

g. un hiperboloide de una hoja

h. un hiperboloide de dos hojas

i. un cono elíptico

j. un paraboloide elíptico

k. un paraboloide hiperbólico

l. un plano paralelo al plano coordenado xz

m. un plano vertical

II. Conteste Cierto (C) o Falso (F) en el espacio provisto para cada una de los siguientes enunciados (1pt. c/u)

__C__1) Si $f(x,y)=\dfrac{x\ln(x+1)}{\sqrt{2x^2-3x}}$, entonces $f_y=0$.

__C__2) La gráfica de $z=2x^2+3y^2-5$ representa una función donde z es la variable dependiente y las variables x,y son las independientes.

__F__3) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x,y+h)-f(x)}{h}$

__F__4) El dominio de la función $f(x,y)=(3x-y^2)^{-1}$ es el plano cartesiano.

__C__5) La función $f(x,y)=\dfrac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$ es continua en el punto (1,2).

__C__6) Si $f(x,y)=xh(x)+g(y)$, entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$.

__C__7) Las curvas de nivel de $z=x^2-2y^2$ son hipérbolas.

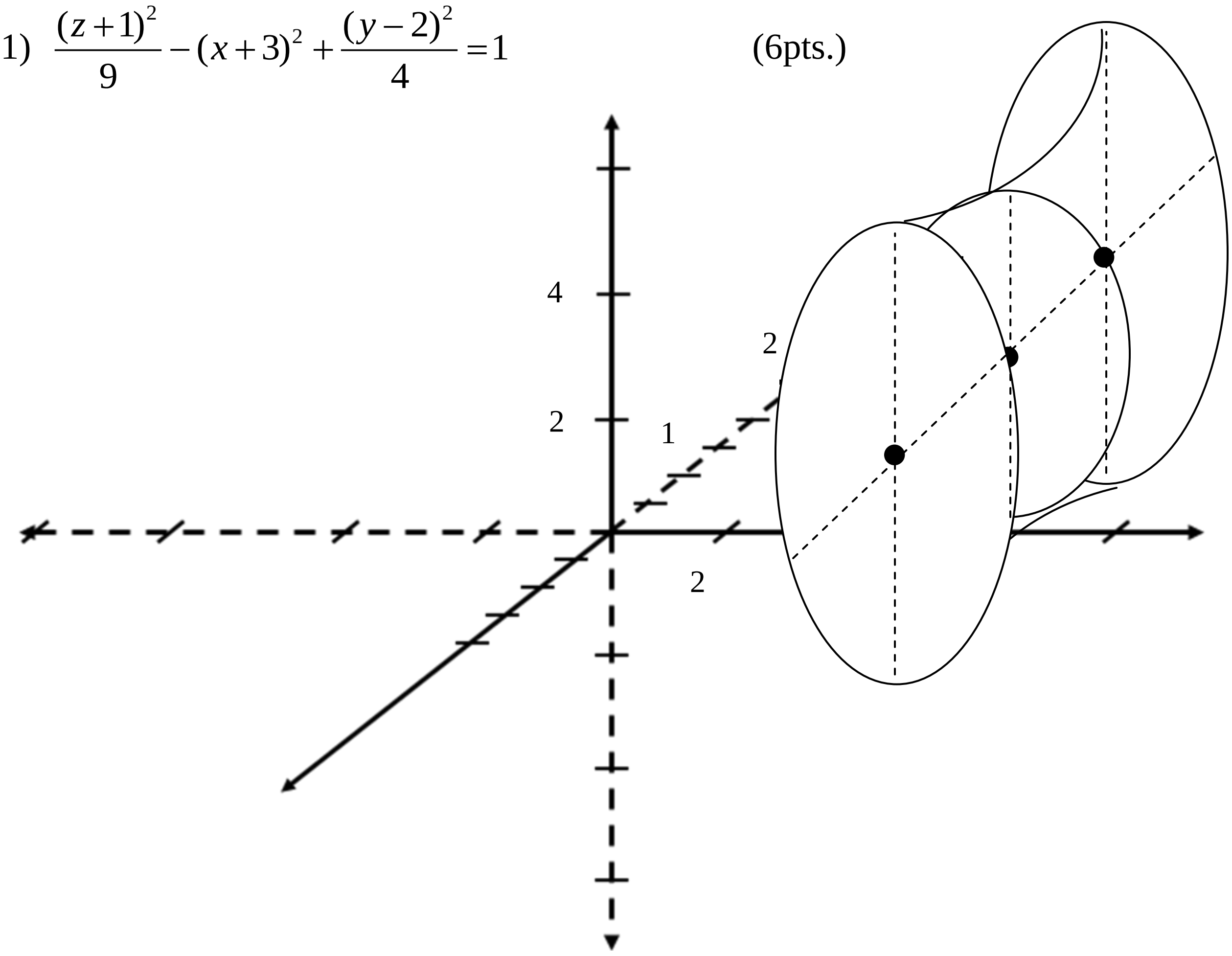
__C__8) En la superficie $z=y^2-x^2$ el punto (0,0,0) es un punto máximo y también un punto mínimo.

__F__9) La derivada de $f(x,y)=x^2+y^2$ es $f'(x,y)=2x+2y$.

__F__10) La traza en el plano coordenado yz de la superficie $y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}$ es una elipse.

III. Trace la gráfica de las siguientes superficies:

1) $\frac{(z+1)^2}{9}-(x+3)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ (6pts.)



Hiperboloide de una hoja con centro $(-3,2,-1)$ orientado en la dirección de x. Construimos un sistema auxiliar (x',y',z') donde el centro es el punto $(-3,2,-1)$. En ese sistema trazamos el hiperboloide $\frac{(z')^2}{9}-(x')^2+\frac{(y')^2}{4}=1$. Para ese hiperboloide dibujamos las trazas elípticas:

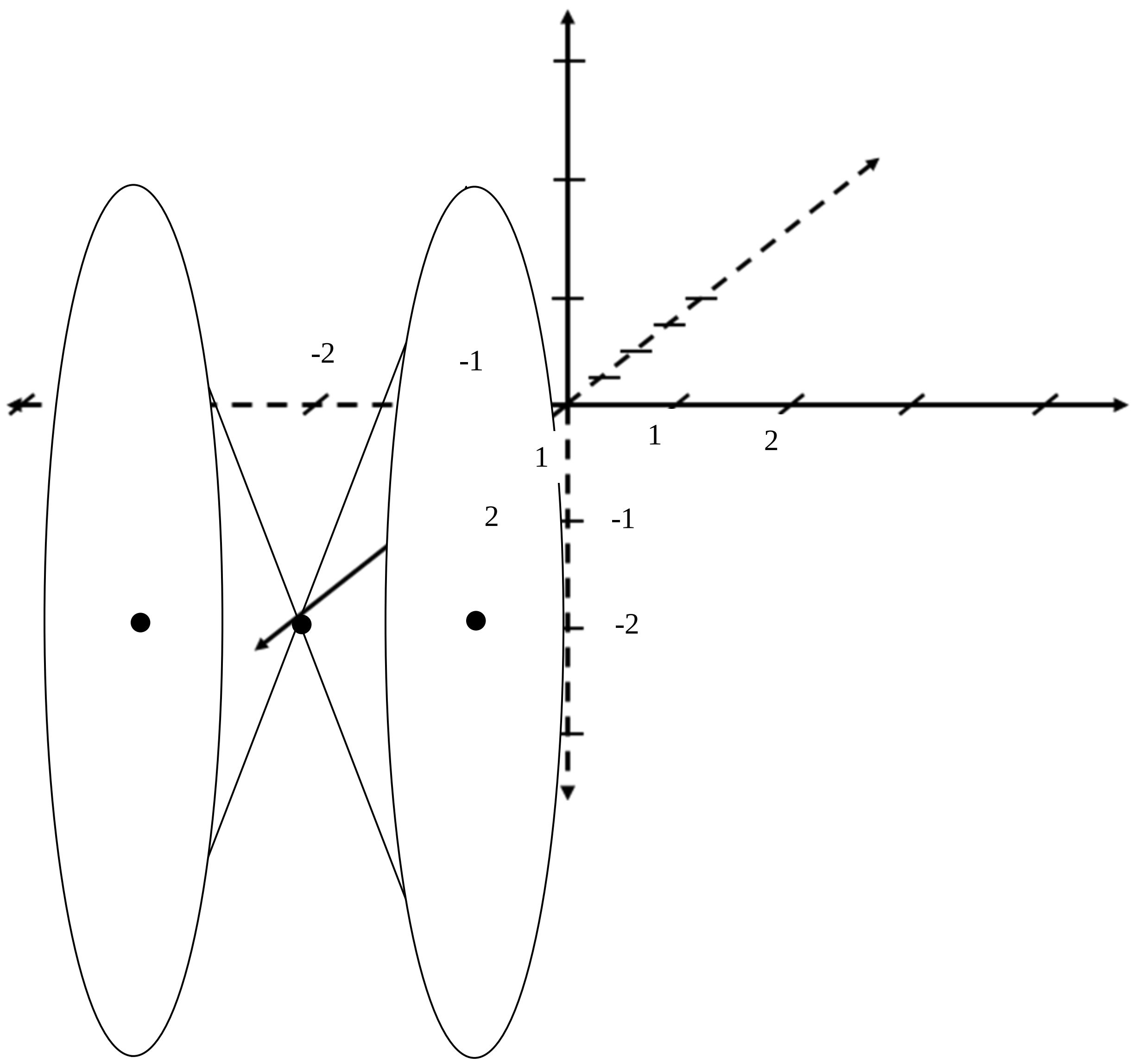
$$x'=0 \Rightarrow \frac{(z')^2}{9}+\frac{(y')^2}{4}=1$$

$$x'=\pm 1 \Rightarrow \frac{(z')^2}{9}+\frac{(y')^2}{4}=2 \Rightarrow \frac{(z')^2}{18}+\frac{(y')^2}{8}=1$$

Luego unimos las tres elipses con las trazas hiperbólicas dadas por

$$z'=0 \Rightarrow -(x')^2+\frac{(y')^2}{4}=1 \qquad z'=0 \Rightarrow \frac{(z')^2}{49}-(x')^2=1$$

2) $(y+2)^2 = x^2 + \frac{(z+2)^2}{9}$ (6pts.)



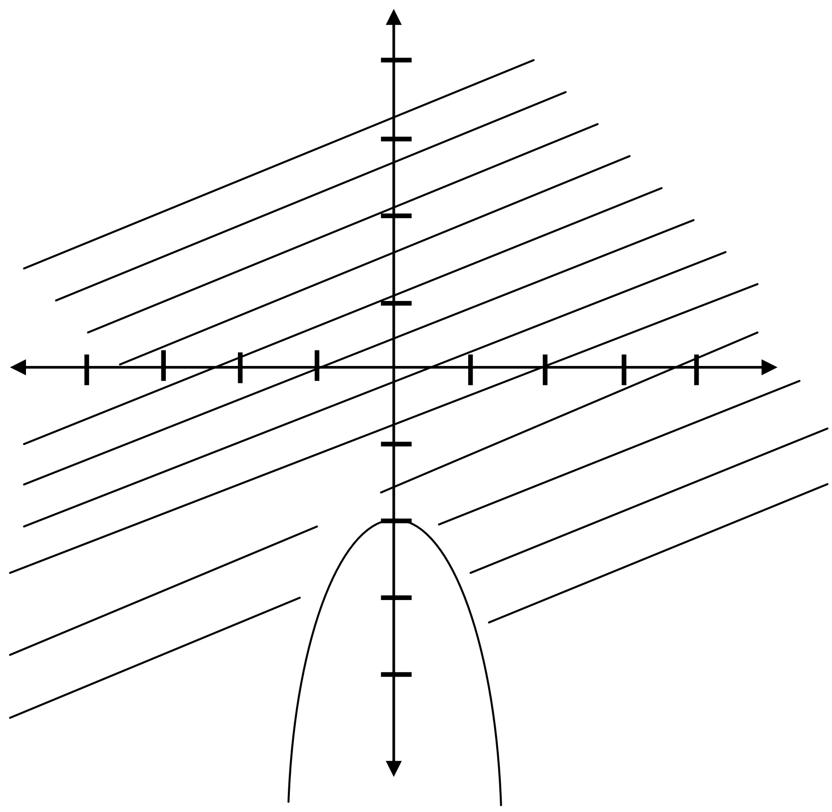
Cono elíptico con centro $(0,-2,2)$ orientada en la dirección de y. Construimos un sistema auxiliar (x',y',z') donde el centro es el punto $(0,-2,2)$. En este sistema trazamos el cono elíptico $(y')^2 = (x')^2 + \frac{(z')^2}{9}$. Primero dibujamos las trazas elípticas dadas por $y' = \pm 1 \Rightarrow 1 = (x')^2 + \frac{(z')^2}{9}$. Luego las unimos con las trazas rectilíneas dadas por

$x' = 0 \Rightarrow (y')^2 = \frac{(z')^2}{9} \Rightarrow y' = \pm \frac{z'}{3}$ & $z' = 0 \Rightarrow (y')^2 = (x')^2 \Rightarrow y' = \pm x'$

IV. Determine el dominio de $f(x,y)=\sqrt{y+x^2+2}$ y dibuje la región definida por tal dominio (5pts.)

Requerimos que $y+x^2+2\geq 0 \Rightarrow y\geq -x^2-2$

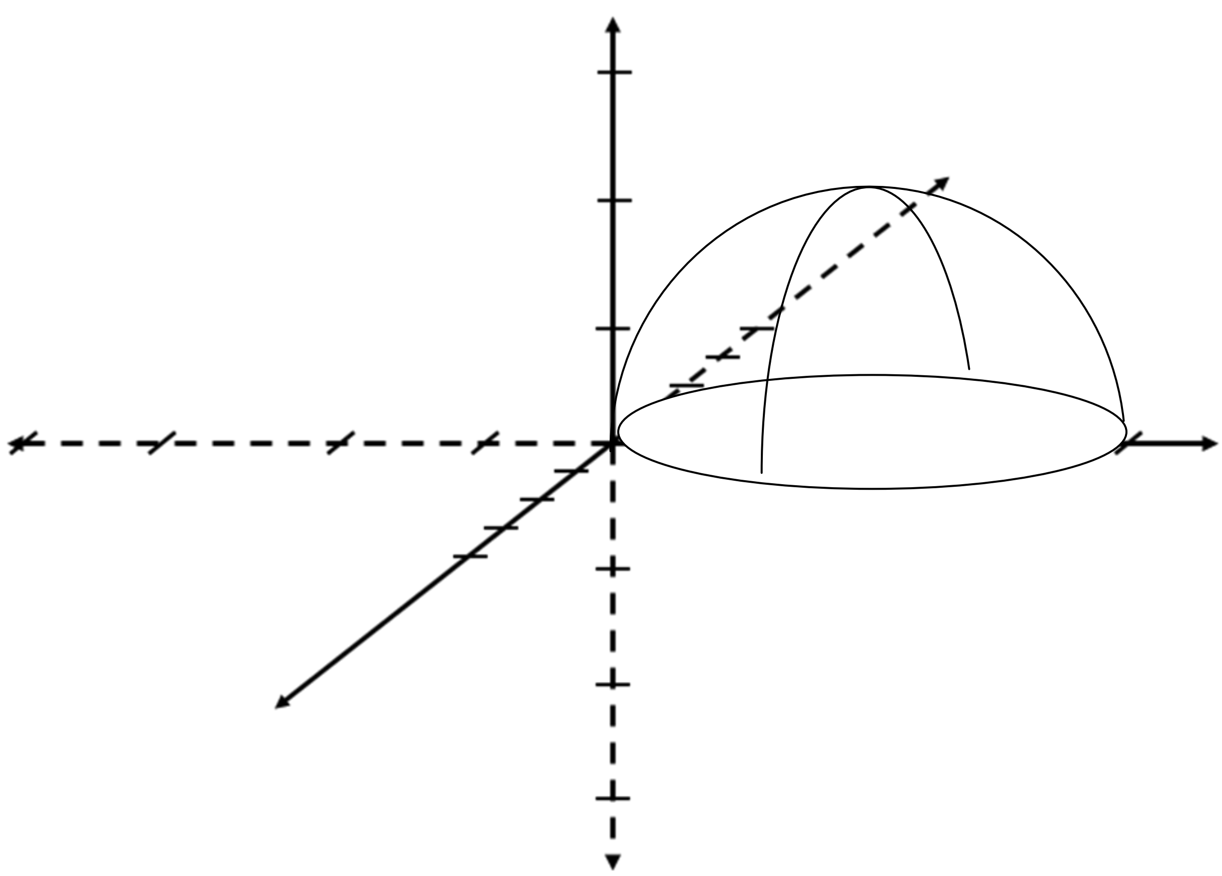
Utilizamos a $y=-x^2-2$ de referencia



V. Trace la gráfica de $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}$ (6pts.)

$$z=\sqrt{4-(x)^2-(y-2)^2} \Rightarrow z^2=4-(x)^2-(y-2)^2,\ z\geq 0 \Rightarrow$$
$$z^2+(x)^2+(y-2)^2=4,\ \ z\geq 0$$

La gráfica es la semiesfera superior con centro en (0,2,0) y radio 2



VI. Determine los siguientes límites

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \left[\dfrac{x^2+4y}{-3x+2y}\right] =$ (3pts.)

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \left[\frac{x^2+4y}{-3x+2y}\right] = \frac{2^2+4(-3)}{-3(2)+2(-3)} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$$

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left[\dfrac{x^2+3xy-4y^2}{x-y}\right] =$ (4pts.)

E límite es una forma indeterminada de formato $\frac{0}{0}$. Notemos que hay un factor repetido, factorizando el numerador obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[\frac{x^2+3xy-4y^2}{x-y}\right] = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[\frac{(x-y)(x+4y)}{x-y}\right] = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x+4y) = 5$$

VII. Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \left(\dfrac{y}{x+y-1}\right)$ no existe. (4pts.)

Necesitamos encontrar dos rutas que pasen por el punto (1,0) y de manera que el límite obtenido en cada ruta sea distinto.

Para la ruta $x=1$ obtenemos

$$\lim_{(1,y)\to(0,0)} \frac{y}{y} = \lim_{(1,y)\to(0,0)} 1 = 1$$

Para la ruta $y=0$ obtenemos

$$\lim_{(x,0)\to(1,0)} \frac{y}{x+y-1} = \lim_{(x,0)\to(1,0)} \frac{0}{x-1} = 0$$

VII. Determine si la función dada por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y}{2y+x} & \text{si } (x,y)\neq(1,2) \\ -3 & \text{si } (x,y)=(1,2) \end{cases}$

es continua en el punto (1,2) . (5pts.)

i. $f(1,2)=-3$

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2-y}{2y+x}=\dfrac{-1}{5}$

iii. $f(1,2)\neq \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2-y}{2y+x}$

Por lo tanto no es continua en (1,2)

VIII. Determine las siguientes derivadas parciales

1) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $z=\cos(x^2y-xy^2)$ (4pts.)

$$\frac{\partial z}{dy}=-\text{sen}(x^2y-xy^2)\bullet(x^2-2xy)$$

2) $f_{xy}(x,y)$ si $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{2xy-5}{x^2y^2}\right)$ (6pts.)

$$f(x,y)=\ln\ 2xy-5\ -\ln(x^2y^2)\Rightarrow$$

$$f_x(x,y)=\frac{y}{2xy-5}-\frac{2xy^2}{x^2y^2}=\frac{2x}{2xy-5}-\frac{2}{x}\Rightarrow$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{(2xy-5)\bullet 0-2x(2x)}{(2xy-5)^2}-0=\frac{-4x^2}{(2xy-5)^2}$$

3) Determine $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $yz^2 - e^z = x^5 y^3$ (6pts.)

$$y(2z)\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 - e^z \frac{\partial z}{\partial y} = x^5(3y^2)$$

$$2yz\frac{\partial z}{\partial y} - e^z \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^5y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\quad 2yz - e^z \quad = 3x^5y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x^5y^2 - z^2}{2yz - e^z}$$

IX. Determine una ecuación de la recta tangente a $f(x,y) = -2x^3y^2 + 3x^3 - y + 7$ en el punto (1,-1,9) cuando intersecamos la superficie f con el plano $x = 1$. (5pts)

$$m = f_y(1,-1)$$

$$f_y(x,y) = -4x^3y - 1 \Rightarrow f_y(1,-1) = 4 - 1 = 3$$

$$z - 9 = 3(y+1)$$

X. Determine una ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y) = -2 + 3xy^3 - \frac{2y}{x^2}$ en el punto $(-1,1,-7)$. (5pts.)

$$z = f_x(-1,1)(x+1) + f_y(-1,1)(y-1) + f(-1,1)$$

$$f_x(x,y) = 3y^3 + 4x^{-3}y \Rightarrow f_x(-1,1) = 3 - 4 = -1$$

$$f_y(x,y) = 9xy^2 - 2x^{-2} \Rightarrow f_y(-1,1) = -9 - 2 = -11$$

$$z = -1(x+1) - 11(y-1) - 7 = -x - 11y + 3$$

$$z = -x - 11y + 3$$

XI. Utilice el diferencial total para aproximar el cambio que el valor de $f(x,y) = -5xy^2 + \ln(y)$ experimenta cuando nos movemos del punto (2,1) al punto (1.98, 1.02). (5pts.)

$$\partial z = f_x(2,1)\Delta x + f_y(2,1)\Delta y$$

$$f_x(x,y) = -5y^2 \Rightarrow f_x(2,1) = -5$$

$$f_y(x,y) = -10xy + \frac{1}{y} \Rightarrow f_y(2,1) = -20 + 1 = -19$$

$$\Delta x = -0.02 \qquad \Delta y = 0.02$$

$$\partial z = f_x(2,1)\Delta x + f_y(2,1)\Delta y = (-5)(-0.02) + (-19)(0.02) =$$

$$0.1 - 0.38 = -0.028$$

Bono: Dibuje el sólido que esta acotado entre las superficies $y = -x^2 - z^2 + 4$ & $y = \sqrt{x^2 + z^2}$. (6pts.)