Universidad de Puerto Rico en Bayamón

Departamento de Matemáticas

Mate3063 – Cálculo III

Examen 2

Nombre____________CLAVE____________ # de est.____________________

Fecha__________________ Sección____________

Instrucciones: Todo procedimiento y/o cómputo necesario para llegar a su resultado deberá escribirlo en el papel del examen para recibir crédito por su respuesta.

1. Para $w = 2ye^x - \ln(z)$ donde $x = \ln(t^2+1)$, $y = \tan^{-1}(t)$ & $z = e^t$ determine $\frac{dw}{dt}$. Escriba $\frac{dw}{dt}$ como una función de la variable(s) independiente(s). (5pts.)

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\delta w}{\delta x}\bullet\frac{dx}{dt} + \frac{\delta w}{\delta y}\bullet\frac{dy}{dt} + \frac{\delta w}{\delta z}\bullet\frac{dz}{dt}$$

$$= 2ye^x\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) + 2e^x\left(\frac{1}{t^2+1}\right) - \frac{1}{z}e^t$$

$$= \frac{4t(t^2+1)(\tan^{-1}t)}{t^2+1} + 2(t^2+1)\left(\frac{1}{t^2+1}\right) - 1$$

$$= 4t(\tan^{-1}t) + 1$$

2. Sea $z = \text{sen}(3x-2y)$, donde $x = 3s^2 - t, y = 5s - t^2$. Determine $\frac{\delta z}{\delta s}$. Escriba su respuesta en términos de la(s) variable(s) independiente(s). (6pts)

$$\frac{\delta z}{\delta s} = \frac{\delta z}{\delta x}\bullet\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\delta z}{\delta y}\bullet\frac{\delta y}{\delta s}$$

$$= 3\cos(3x-2y)\bullet 6s - 2\cos(3x-2y)\bullet 5$$

$$= 2\cos(3x-2y)\bullet(9s-5)$$

$$= 2\cos[(9s^2-3t) - 2(5s-t^2)](9s-5)$$

$$= 2(9s-5)\cos[(9s^2+2t^2-10s-3t)]$$

3. Para la ecuación $xe^{y} + sen(xy) + y = 7$ suponga que $y = f(x)$. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ sin utilizar diferenciación implícita. (5pts.)

Deje que $F(x, y) = xe^{y} + sen(xy) + y$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-[e^{y} + y\cos(xy)]}{xe^{y} + x\cos(xy) + 1}$$

4. Utilice el concepto del gradiente para determinar una ecuación de la recta tangente a la curva $xy^2 - 7y^2 - \ln(xy) = -3x^2$ en el punto (2,-1). (5pts.)

Dejando que $f(x, y) = xy^2 - 7y^2 - \ln(xy) + 3x^2$ entonces una ecuación de la recta tangente está dada por $f_x(2, -1)(x - 2) + f_y(2, -1)(y + 1) = 0$.

Dado que

$$f_x(x, y) = y^2 - \frac{y}{xy} + 6x = y^2 - \frac{1}{x} + 6x \Rightarrow f_x(2, -1) = \frac{25}{2}$$

$$f_y(x, y) = 2xy - 14y - \frac{x}{xy} = 2xy - 14y - \frac{1}{y} \Rightarrow f_y(2, -1) = 11$$

Por lo tanto, una ecuación de la recta tangente es

$$\frac{25}{2}(x - 2) + 11(y + 1) = 0 \quad \text{ó} \quad 25(x - 2) + 22(y + 1) = 0$$

5. Determine la derivada direccional de $f(x,y)=\sqrt{y-x}$ en el punto $(-1,1)$ en la dirección al origen. (6pts.).

El vector dirección $\vec{v}$ comienza en $(-1,1)$ y termina en (0,0), por lo tanto

$$\vec{v}=(0-{}^{-}1)i+(0-1)j=i-j \Rightarrow \left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{2}$$

Entonces el vector unitario que brinda la dirección es

$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,-1\rangle=\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

La derivada direccional está dada por

$$D_{\vec{u}} f(-1,1)=\nabla f(-1,1) \bullet \vec{u}=\left\langle f_x(-1,1), f_y(-1,1)\right\rangle \bullet \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

Dado que

$$f_x(x,y)=\frac{1}{2}(y-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)=\frac{-1}{2\sqrt{y-x}} \Rightarrow f_x(-1,1)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{2}(y-x)^{-\frac{1}{2}}(1)=\frac{1}{2\sqrt{y-x}} \Rightarrow f_x(-1,1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Entonces la derivada direccional está dada por

$$D_{\vec{u}} f(-1,1)=\left\langle \frac{-1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\rangle \bullet \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle=\frac{-1}{4}+\frac{-1}{4}=-\frac{1}{2}$$

6. Determine una ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{2(x-3)^2}{4}-2y^2+\frac{(z-1)^2}{9}=1$ en el punto $(1,-1,4)$. (6pts.)

Sea $F(x,y,z)=\frac{2(x-3)^2}{4}-2y^2+\frac{(z-1)^2}{9}-1$, entonces una ecuación del plano tangente en el punto $(1,-1,4)$ está dada por $F_x(1,-1,4)(x-1)+F_y(1,-1,4)(x+1)+F_z(1,-1,4)(x-4)=0$.

Dado que

$$F_x(x,y,z)=x-3 \Rightarrow F_x(1,-1,4)=-2$$

$$F_y(x,y,z)=-4y \Rightarrow F_y(1,-1,4)=4$$

$$F_z(x,y,z)=\frac{2}{9}(z-1) \Rightarrow F_y(1,-1,4)=\frac{2}{3}$$

Obtenemos que una ecuación del plano tangente en el punto $(1,-1,4)$ está dada por:

$$-2(x-1)+4(y+1)+\frac{2}{3}(z-4)=0$$

7. La temperatura en grados Celsius en un punto (x, y) de la superficie de una placa metálica está dada por la función $T(x, y) = 40 - 5x^2 - 3y^2$ donde x, y se miden en centímetros. ¿En cuál dirección, a partir del punto $(2, -3)$, crece más rápido la temperatura? ¿Cuál es la razón de crecimiento en tal punto en la dirección mencionada? (6pts.)

(Cuando la temperatura crece hay un cambio en temperatura con respecto al tiempo, entonces nos estamos refiriendo a la razón de cambio de la temperatura, esto es a la derivada. Por lo que se nos pide en qué dirección la derivada crece más rápido)

La temperatura crece más rápido en la dirección $\nabla T(2,-3)$, por lo que requerimos determinar

$$T_x(x, y) = -10x \Rightarrow T_x(2,-3) = -20$$
$$T_y(x, y) = -6y \Rightarrow T_y(2,-3) = 18$$

Entonces $\nabla T(2,-3) = \langle -20, 18 \rangle$

Además la razón de crecimiento en tal punto en la dirección mencionada está dada por

$$\|\nabla T(2,-3)\| = \sqrt{(-20)^2 + 18^2} = 2\sqrt{[100 + 81]} = 2\sqrt{181}$$

8. Determine los puntos críticos de $f(x, y) = \sqrt{-4y + 6x - 5}$ (5pts.)

Notemos que el dominio de esta función esta dado por $D_f = \{(x, y) : -4x + 6x - 5 \geq 0\}$. Además

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} \; -4y + 6x - 5 \;^{-\frac{1}{2}} \bullet 6 = \frac{3}{\sqrt{-4y + 6x - 5}}$$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} \; -4y + 6x - 5 \;^{-\frac{1}{2}} \bullet -4 = \frac{-4}{\sqrt{-4y + 6x - 5}}$$

Por lo tanto $f_x(x, y)$ & $f_x(x, y)$ nunca son cero y cualesquiera de ellas no existe para todos los puntos en el conjunto $C = \{(x, y) : -4y + 6x - 5 = 0\}$. Por lo tanto, los puntos críticos son todos los puntos en la recta $-4y + 6x - 5 = 0$.

9. Determine los valores extremos relativos (locales) de $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$. (9pts.)

Dado que $f_x(x,y) = -3x^2 + 4y$ & $f_y(x,y) = 4x - 4y$ los puntos críticos son los puntos (x,y) que satisfacen el sistema

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -3x^2 + 4y = 0 \\ x = y \end{array} \Rightarrow \text{ Sustituyendo } x = y \text{ en } -3x^2 + 4y = 0$$

obtenemos $-3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-3x+4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \frac{4}{3}$ y ahora sustituyendo en $x = y$ obtenemos los puntos $(0,0)$ & $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Ahora ponemos a prueba cada punto sometiéndolos a la prueba de las segundas derivadas, esto es, primero a $D(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - f_{xy}{}^2(x,y)$ & luego a $f_{xx}(x,y)$ de ser necesario.

Para $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

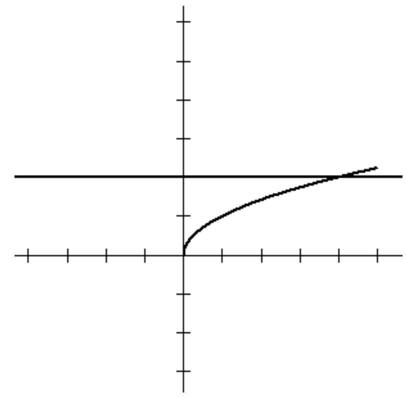
$f_{xx}(x,y) = -6x$, $f_{yy}(x,y) = -4$ & $f_{xy}(x,y) = 4$ Por lo tanto $D(x,y) = (-6x)(-4) - 16 = 24x - 16$

Entonces $D(0,0) = -16$ por lo que el punto $(0,0,1)$ es un punto de silla de la superficie.

Además $D\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 16$ entonces calculamos $f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{24}{3}$. Por lo tanto, el valor $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{59}{27}$ es un valor máximo relativo (local) de la función.

10. Para $f(x,y)=x^2+3y^2-3xy^2$ determine los valores extremos absolutos sobre la región acotada por las curvas $y=\sqrt{x}, y=2$ & el eje de y . (10pts.)

Puntos Críticos: Región



$f_x(x,y)=2x-3y^2$ & $f_y(x,y)=6y-6xy \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}2x-3y^2=0\\6y-6xy=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-3y^2=0\\y(1-x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-3y^2=0\\y=0\ ó\ 1=x\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\ 0,0\ ,\left(1,\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\left(1,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Ninguno de los tres puntos está dentro de la región: pues (0,0) está en la frontera, y en la curva $y=\sqrt{x}$ cuando $x=1, y=1$ & $\sqrt{\frac{2}{3}}<1$ y el punto $\left(1,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ está en el cuadrante IV.

Análisis de la frontera: Dividimos la frontera en tres secciones:

$F_1=\ (x,y): x=0, 0\le y\le 2\ \Rightarrow f(0,y)=3y^2, 0\le y\le 2$ en esta sección de la frontera la función tiene valores extremos absolutos: $f(0,0)=0$, $f(0,2)=12$.

$F_2=\ (x,y): 0\le x\le 4, y=2\ \Rightarrow f(x,2)=x^2+12-12x, 0\le x\le 4$

$\Rightarrow f'(x,2)=2x-12=0\Rightarrow x=6$

Pero el punto (6,2) está fuera de la región en consideración.

En esta sección la función tiene valores extremos absolutos:

$f(0,2)=12$, $f(4,2)=-20$

$F_3=\ (x,y): y=\sqrt{x}, 0\le x\le 4\ \Rightarrow f(x,\sqrt{x})=-2x^2+3x, 0\le x\le 4$

$\Rightarrow f'(x,\sqrt{x})=-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{3}{4}$

En esta sección la función tiene valores extremos absolutos:

$f(0,0)=0$, $f(4,2)=-20$, $f\left(\frac{3}{4},\sqrt{\frac{3}{4}}\right)=\frac{9}{8}$

Entonces, comparamos a $f(0,0)=0$, $f(0,2)=12$, $f(4,2)=-20$, $f\left(\frac{3}{4},\sqrt{\frac{3}{4}}\right)=\frac{9}{8}$

Obteniendo como valor máximo absoluto a $f(0,2)=12$ y

Como valor mínimo absoluto a $f(4,2)=-20$.

11. Utilice el Método de Multiplicadores de Lagrange para determinar los valores máximos absolutos de $f(x,y)=\ln(xy^2)$ sujeto a la restricción $2x^2+3y^2=8$. (8pts.)

Sea $G(x,y)=2x^2+3y^2 \Rightarrow G_x(x,y)=4x,\ G_y(x,y)=6y$.

Además
$$f(x,y)=\ln(xy^2) \Rightarrow f_x(x,y)=\frac{y^2}{xy^2}=\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow f_y(x,y)=\frac{2xy}{xy^2}=\frac{2}{y}$$

Por lo tanto debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}=\lambda(4x)\\ \frac{2}{y}=\lambda(6y)\\ 2x^2+3y^2=8\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{1}{4\lambda}=x^2\\ \frac{1}{3\lambda}=y^2\\ 2x^2+3y^2=8\end{array}\right\}$$

Sustituyendo $\frac{1}{4\lambda}=x^2$, $\frac{1}{3\lambda}=y^2$ en la restricción $2x^2+3y^2=8$ obtenemos

$$2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)+3\left(\frac{1}{3\lambda}\right)=8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2\lambda}\right)+\left(\frac{1}{\lambda}\right)=8$$
$$\Rightarrow 1+2=8(2\lambda)\Rightarrow 3=16\lambda\Rightarrow \frac{3}{16}=\lambda$$

Sustituyendo $\lambda=\frac{3}{16}$ en $\frac{1}{4\lambda}=x^2$ obtenemos $\frac{1}{4\bullet\frac{3}{16}}=x^2\Rightarrow \frac{4}{3}=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$,

análogamente

Sustituyendo $\lambda=\frac{3}{16}$ en $\frac{2}{6\lambda}=y^2$ obtenemos $\frac{2}{6\bullet\frac{3}{16}}=y^2\Rightarrow \frac{16}{9}=y^2\Rightarrow y=\pm\frac{4}{3}$. Sólo consideramos los puntos con valores de $x>0$ por el dominio de $f(x,y)=\ln(xy^2)$.

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{4}{3}\right)\Rightarrow f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{4}{3}\right)=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\bullet\frac{16}{9}\right)=\ln\left(\frac{32}{9\sqrt{3}}\right)$$
$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{4}{3}\right)\Rightarrow f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{4}{3}\right)=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\bullet\frac{16}{9}\right)=\ln\left(\frac{32}{9\sqrt{3}}\right)$$

Vea que el punto $(1,\sqrt{2})$ está en dominio de $f(x,y)=\ln(xy^2)$ y satisface la restricción $2x^2+3y^2=8$. En tal punto $f(1,\sqrt{2})=\ln(2)<\ln\left(\frac{16}{9}\sqrt{2}\right)$, por lo tanto $\ln\left(\frac{16}{9}\sqrt{2}\right)$ es un valor máximo absoluto.

12. Evalúe $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y)dx\,dy$ (5pts.)

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y)dx\,dy = \int_0^2 (2x^2 - xy)\Big|_{y^2}^{2y} dy$$

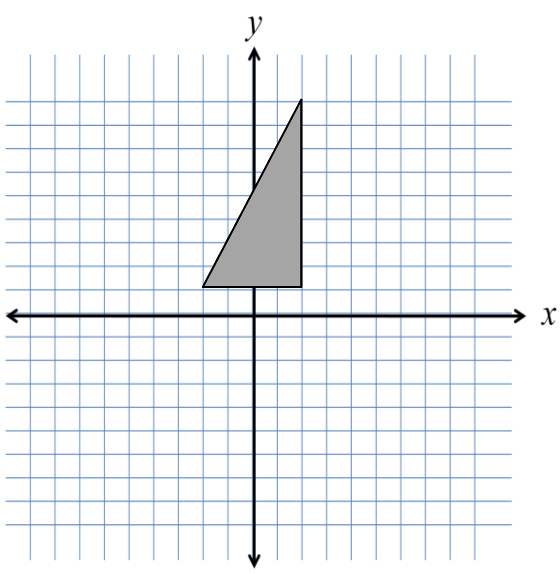
$$= \int_0^2 [(8y^2 - 2y^2) - \ 2y^4 - y^3 \ ]\,dy$$

$$= \int_0^2 (-2y^4 + y^3 + 6y^2)\,dy$$

$$= \left(-2\frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{4} + 2y^3\right)\Big|_0^2$$

$$= -\frac{64}{5} + 4 + 16 = \frac{36}{5}$$

13. Evalúe la doble integral $\iint_R (x^2 y - 5y)\,dA$ si R es la región triangular definida por los vértices (-2,1), (2,9), (2,1). (7pts.)



El segmento de recta que une a los puntos (-2,1) y (2,9) tiene ecuación $y = 2x + 5$.

Podemos describir la región de integración por el conjunto

$D = \{(x, y):\ 1 \le y \le 2x + 5,\ -2 \le x \le 2\}$

$$\iint_R (x^2 y - 5y)\,dA = \int_{-2}^{2} \int_{1}^{2x+5} (x^2 y - 5y)dydx = \int_{-2}^{2} (x^2 - 5) \int_{1}^{2x+5} ydydx$$

$$= \int_{-2}^{2} (x^2 - 5)\bullet \frac{y^2}{2}\Big|_{1}^{2x+5} dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (x^2 - 5)\bullet\left[(2x+5)^2 - 1\right]dx$$

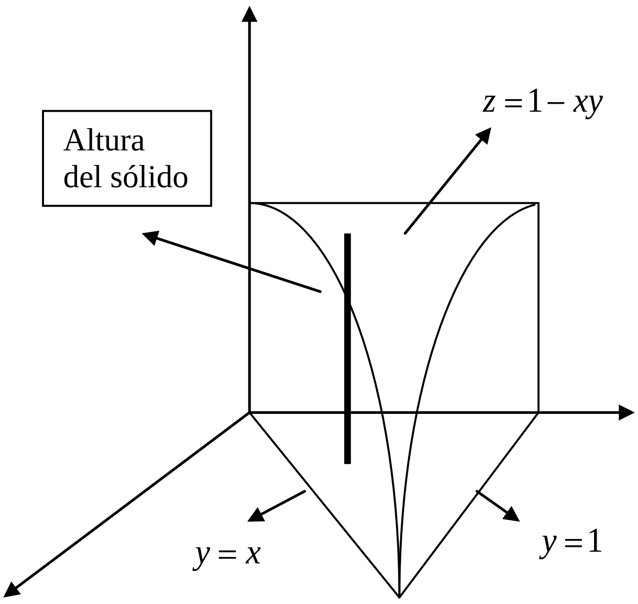
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (x^2 - 5)\bullet\left[4x^2 + 20x + 24\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} [4x^2 + 20x^3 + 24x^2 - 20x^2 - 100x - 120]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} [4x^4 + 20x^3 + 4x^2 - 100x - 120]dx$$

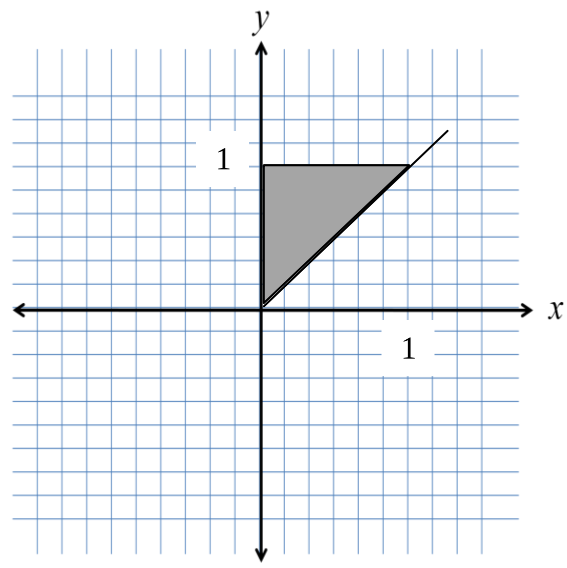
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}x^5 + 5x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 50x^2 - 120x\right]\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2(4)(2^5)}{5} + \frac{2(4)(2^3)}{3} - 2(120)(2)\right]$$

$$= \frac{128}{5} + \frac{32}{3} - 240 = \frac{384}{15} + \frac{160}{15} - \frac{3600}{15} = \frac{-3056}{15}$$

14. Plantee una integral que representa el volumen del sólido representado por la siguiente gráfica (5pts.)



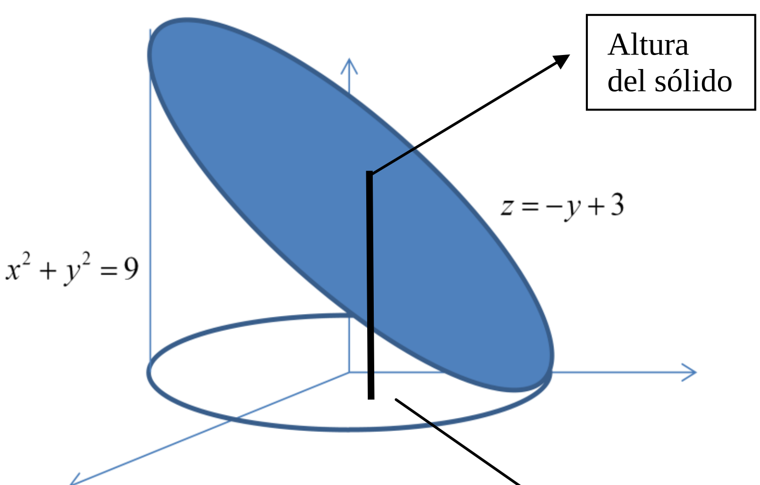
Región de integración



$$\int_0^1 \int_x^1 (1 - xy)\, dy\, dx \quad \text{ó}$$

$$\int_0^1 \int_0^y (1 - xy)\, dx\, dy$$

15. Plantea una integral que representa el volumen del sólido acotado $9 = x^2 + y^2,\ z > 0,\ z = -y + 3$. Dibuje el sólido. (6pts.)



$$V = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (-y + 3)\, dy\, dx$$

Región de integración