Trazando Gráficas en el Espacio Cartesiano

Mate 3063 – Cálculo III

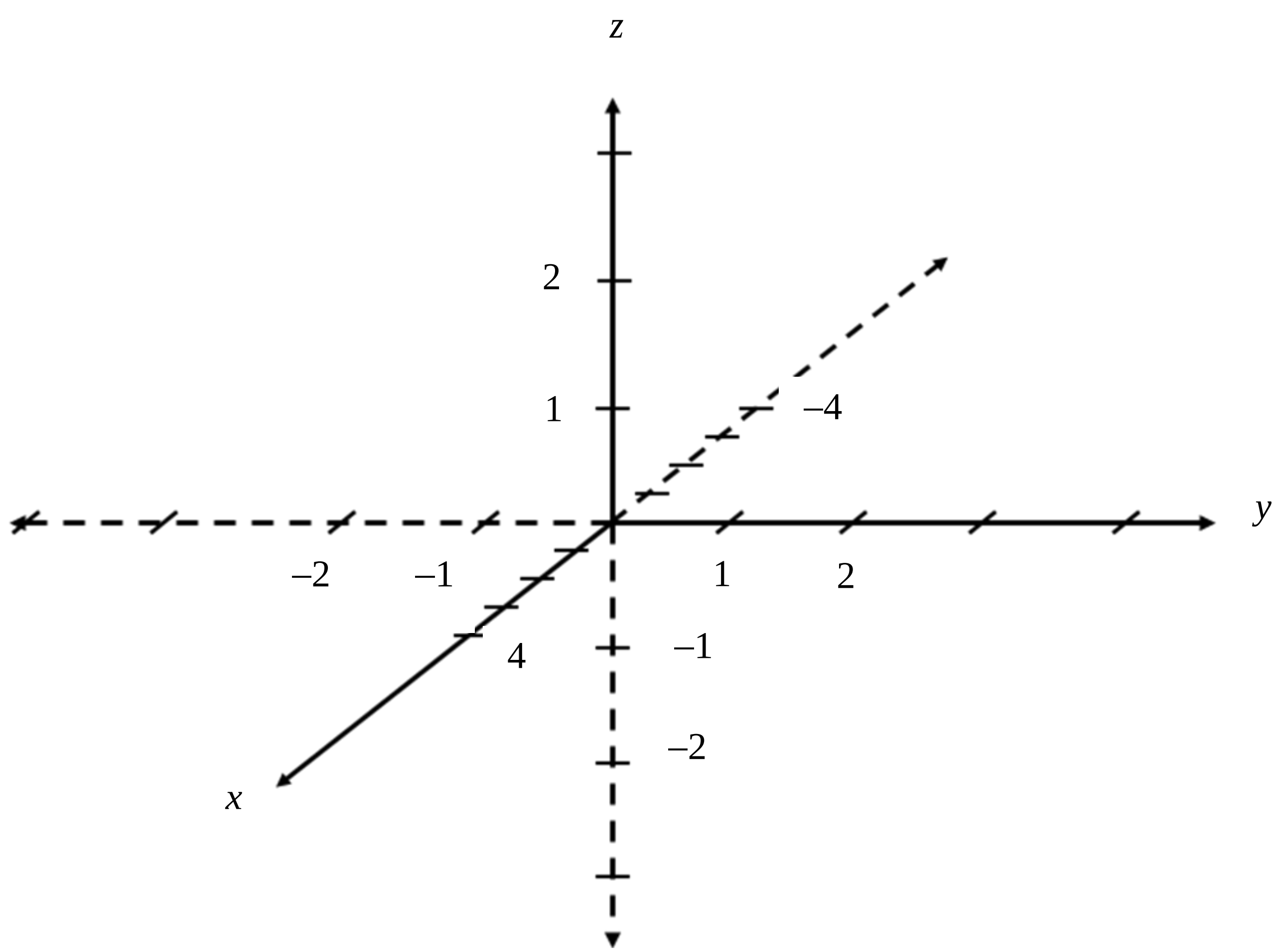
Departamento de Matemáticas

Universidad de Puerto Rico en Bayamón

Prof. Edward A. Caro López

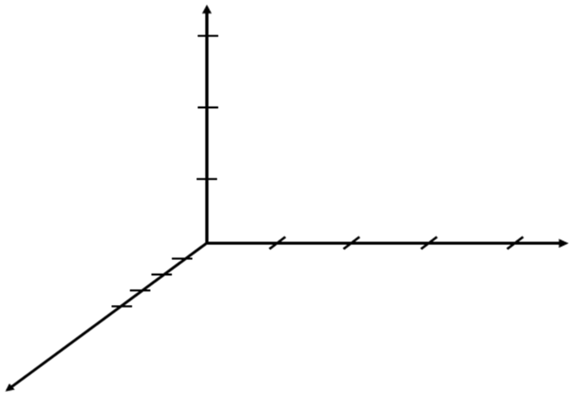
Enero 2013

Pretendemos en este documento establecer las nociones básicas que necesitamos para trazar la gráfica de una ecuación en el espacio cartesiano. Las gráficas que trazaremos, en general, serán **superficies.** Nuestra meta es poder dibujar con alguna precisión de manera cuando estemos determinando el volumen de un sólido asociado a una o más superficies podamos ver con claridad tal sólido. Las gráficas que trazamos en esta ocasión responden, en general, a ecuaciones en tres variables. Sin embargo, podemos tener ecuaciones en una o dos variables donde hay variables al igual que en el curso de pre-cálculo. Comenzaremos por repasar el diseño del espacio cartesiano, el cual vimos en el curso Mate3032 (Cálculo II) y sus características. El espacio cartesiano que utilizaremos es el siguiente



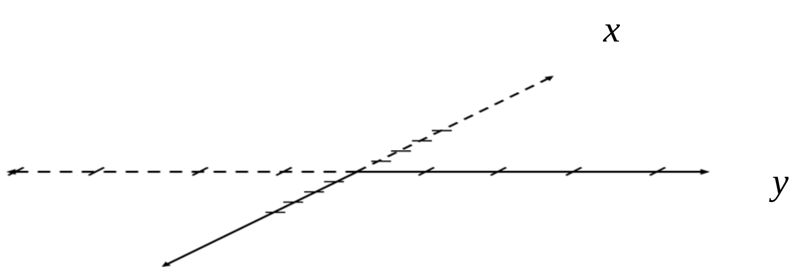
Notemos que este sistema tiene ocho subdivisiones, cuatro con coordenadas verticales positivas y cuatro con coordenadas verticales negativas, a cada una se le llama **octante**.

Por ejemplo, el octante cuyos puntos tiene todas sus coordenadas positivas es

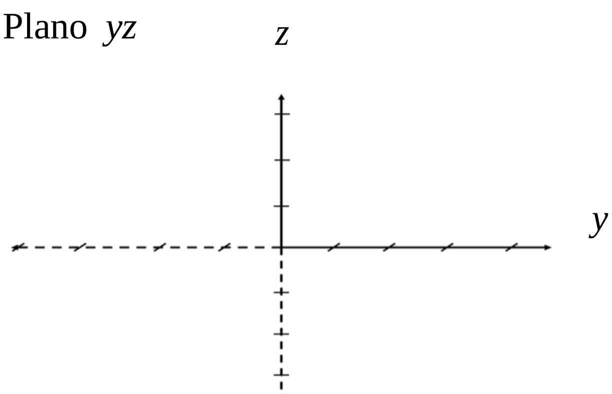


Además el espacio cartesiano contiene tres planos generados por los ejes de coordenadas a éstos planos se le llaman planos coordenados. A saber, el plano coordenado xy el cual hemos utilizado en cursos anteriores, pero que ahora se encuentra como "piso" de este sistema. También tenemos el plano coordenado yz, este ocupa la posición visual del plano cartesiano xy introducido en el curso de pre-cálculo. Finalmente el plano coordenado xz, el cual junto al plano xy le dará un sentido de profundidad (y por lo tanto perspectiva) a las gráficas dibujadas.

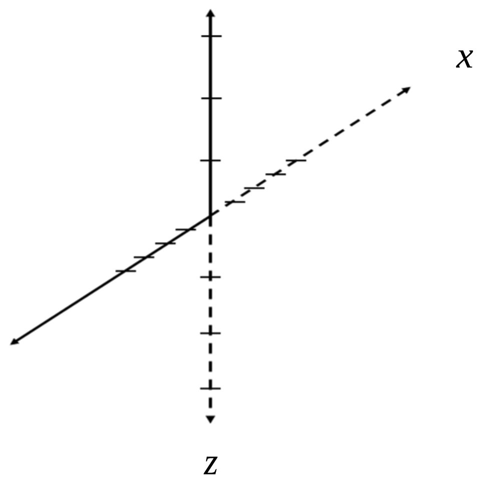
Plano xy



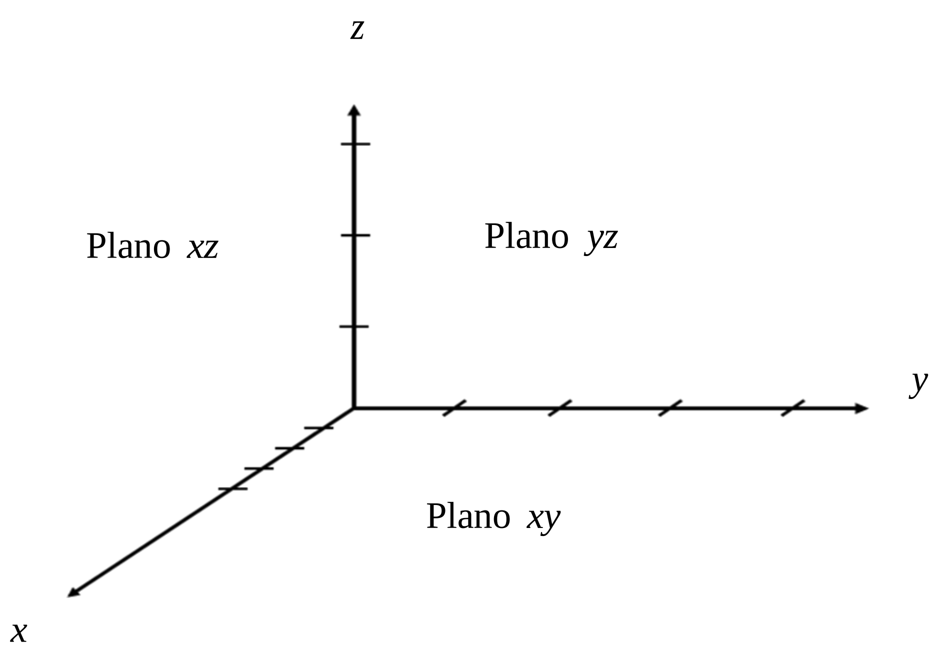
Plano yz



Plano xz



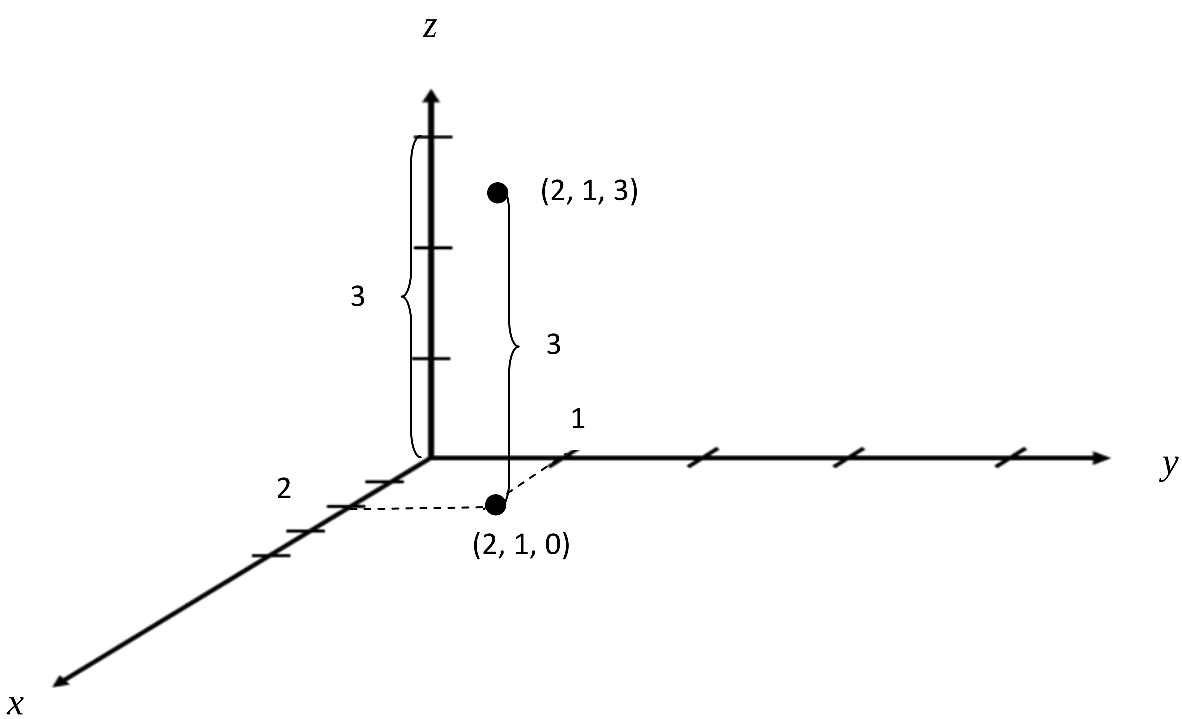
Mirando a estos planos dentro del sistema y considerando el primer octante obtenemos la siguiente identificación de estos planos



Todo punto en este sistema tiene tres coordenadas por lo que tiene la forma (x, y, z). Entonces los puntos en los planos coordenados tendrán las siguientes formas, en el plano xy serán de la forma $(x, y, 0)$, en el xz serán de la forma $(x, 0, z)$ y finalmente los puntos en el plano yz de la forma $(0, y, z)$.

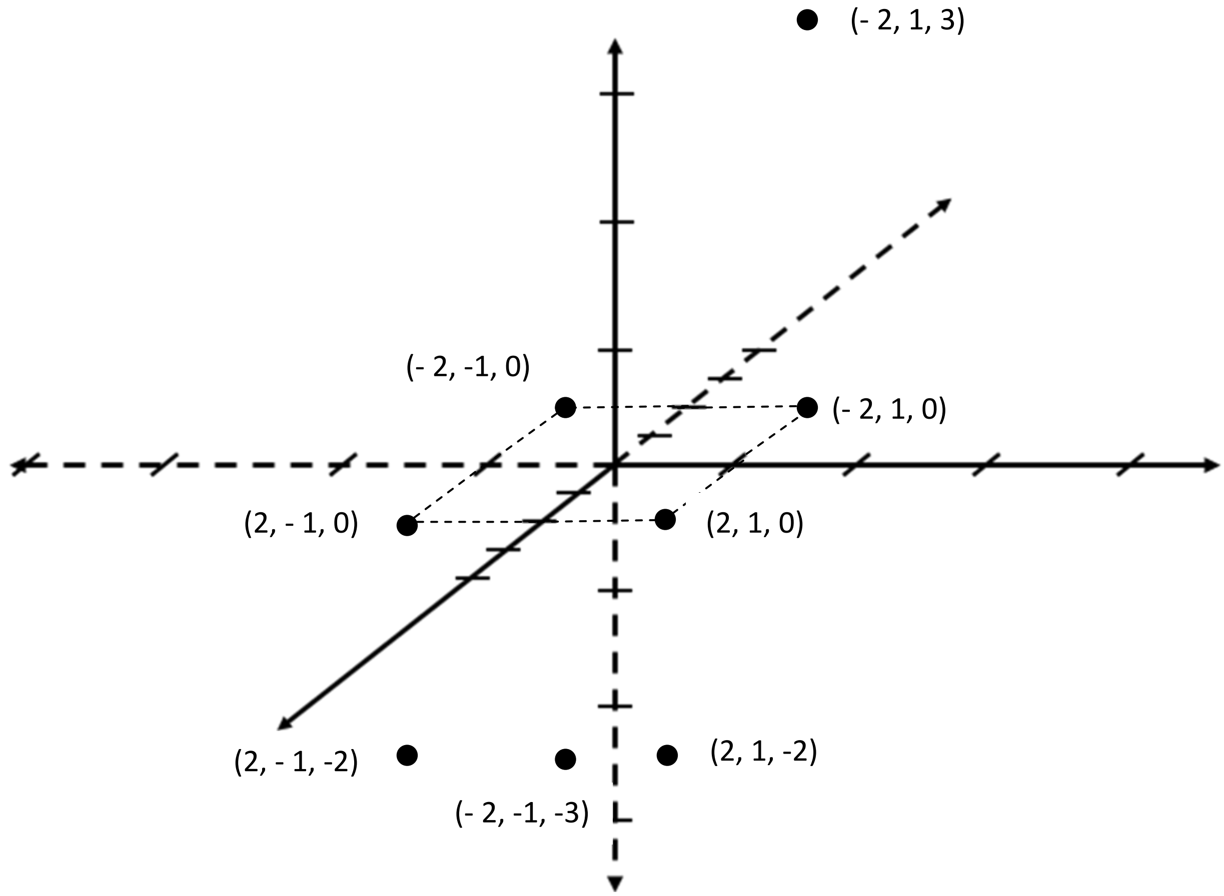
Para localizar un punto (x, y, z) en este sistema primero localizamos el punto $(x, y, 0)$ en el plano xy para luego movernos z unidades en el eje vertical.

Veamos, para localizar el punto (2, 1, 3) primero localizamos el punto (2, 1, 0)

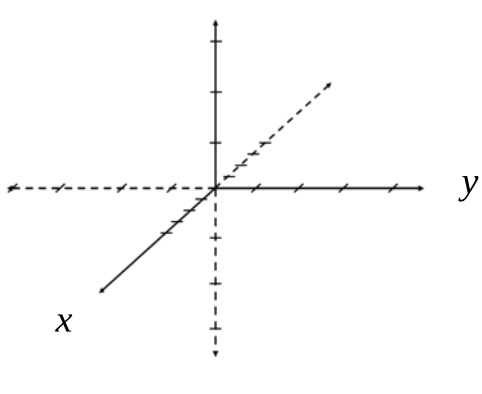


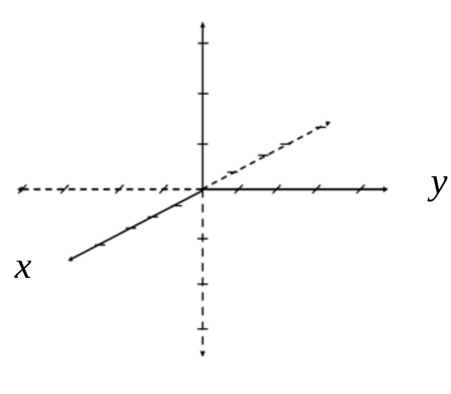
Notemos que la escala utilizada en el eje de x es más pequeña que las escalas en los otros ejes, esto es para generador profundidad (perspectiva). En general, sugiero (con algunas excepciones) escoger escalas iguales para los ejes de y & z pero una menor (quizás la mitad del tamaño) para el eje de x. Por otro lado, para localizar el punto (2, 1,0) utilizamos como guía dos segmentos paralelos a los ejes de x & y. Además notemos que para establecer la localización del punto (2, 1, 3) subimos tres unidades desde la localización del punto (2, 1,0) según la escala seleccionada en el eje de z y que visualmente se ve más abajo que la coordenada 3 en el eje de z.

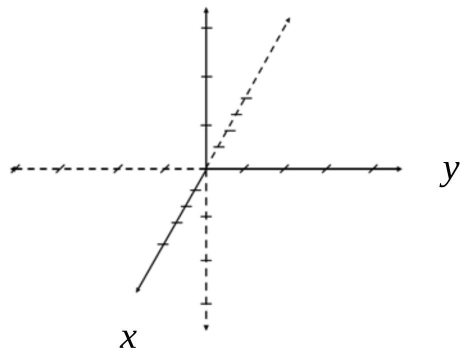
Otros ejemplos: localice los puntos $(2,1,-2), (-2,1,3), (2,-1,-2), (-2,-1,-3)$ en el espacio cartesiano.

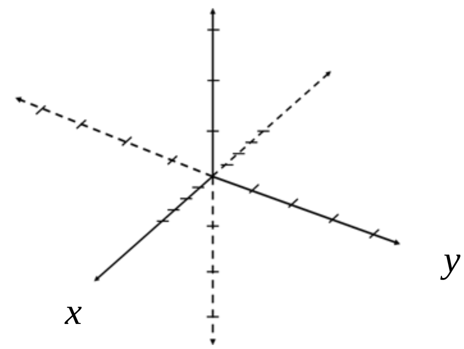


El sistema del espacio cartesiano puede ser utilizado con distintos ángulos entre el ele eje de x y el eje de y. Véase las siguientes posibilidades:

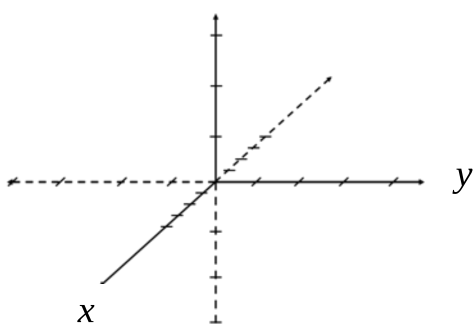


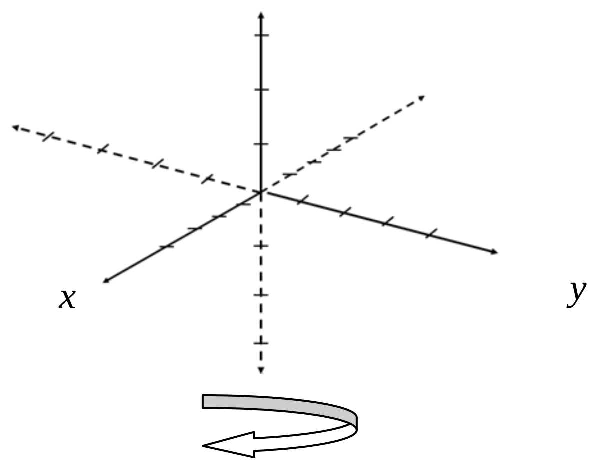


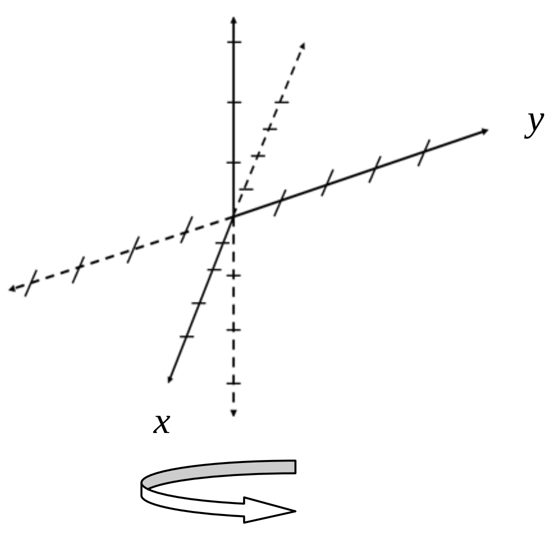




En algunas ocasiones la superficie trazada se puede apreciar mejor con un ángulo en particular. En otras ocasiones para visualizar mejor la superficie a trazar es recomendable rotar el sistema completo. Vea las siguientes posibilidades:

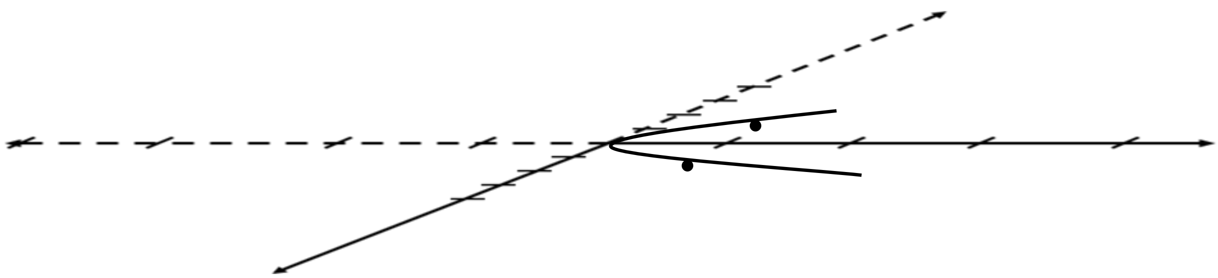




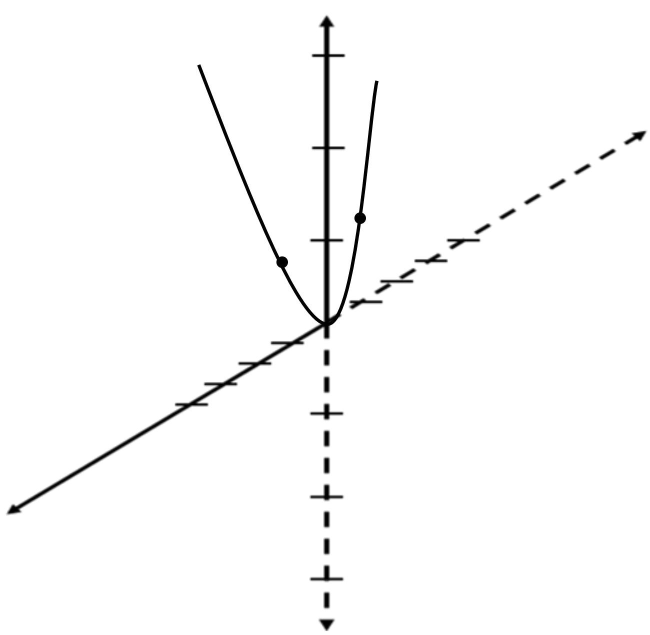


Para trazar las superficies en tres dimensiones necesitaremos trazar curvas en los planos coordenados. Ya tenemos dominio del trazado de curvas en el plano yz por lo que necesitamos trabajar con el trazado de curvas en los planos coordenados xy & xz.

Por ejemplo, la grafica de $y = x^2$ tiene una perspectiva distinta, veamos



La gráfica de $z = x^2$ es



Ejercicio : Trace en los planos coordenados correspondientes las gráficas de :

$$y=|x|,\ y=2x-3,\ y=x^3,\ y=x,\ y=1, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1, \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

$$z=|x|,\ z=3x+2,\ z=x,\ z=-2, \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1, \frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1$$

Ahora nos dedicamos a trazar las distintas superficies más utilizadas. Para facilitar la discusión dividimos en grupos estas superficies.

Planos

Un plano es una superficie formada por un conjunto de rectas paralelas a una recta dada y que pasan por una recta en el plano.

La ecuación general de un plano está dada por $Ax+By+Cz+D=0$ donde el vector $\vec{v}=\langle A,B,C\rangle$ es el vector normal al plano. El plano es la generalización de la recta en el plano cartesiano y también se extiende de manera infinita, por lo que dibujamos una parte del plano. Para dibujar un plano determinamos los interceptos de la superficie en los tres ejes coordenados, luego unimos estos puntos con segmentos para obtener una sección triangular del plano que queremos trazar. Para determinar cada intercepto necesitamos fijar dos variables con el valor cero, por ejemplo para el intercepto en el eje de z fijamos $x=y=0$.

Ejemplo: Para el plano $3x+2y+4z-12=0$

Intercepto en el eje de z

Fijamos $x=y=0$ lo que nos deja con $4z-12=0$ y por lo tanto $z=3$. Por lo tanto el intercepto en el eje de z es el punto (0, 0, 3).

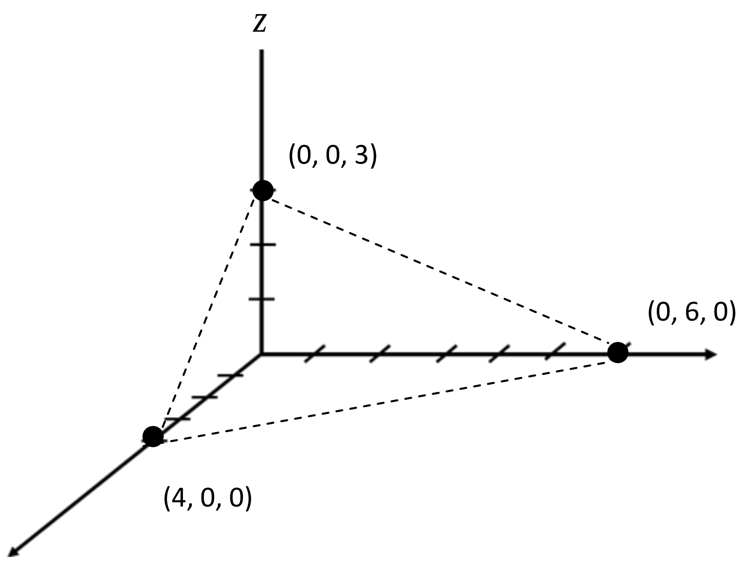
Intercepto en el eje de y

Fijamos $x=z=0$ lo que nos deja con $2y-12=0$ y por lo tanto $y=6$. Por lo tanto el intercepto en el eje de y es el punto (0, 6, 0).

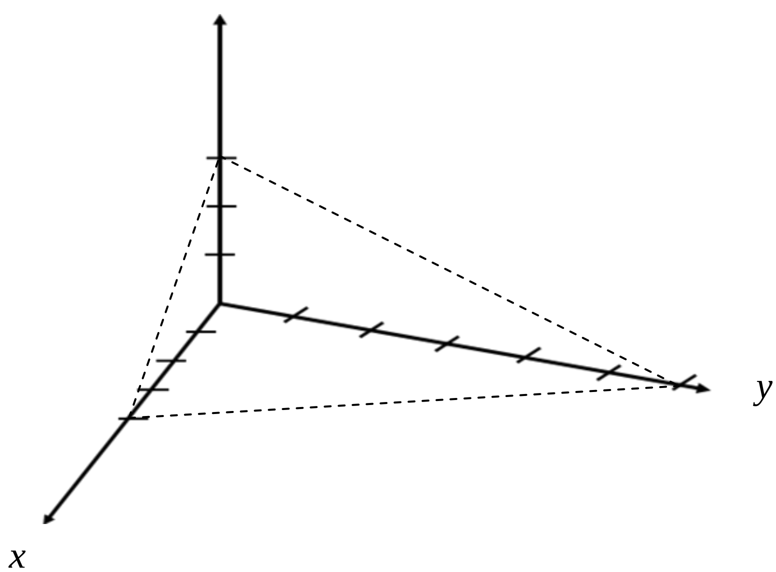
Intercepto en el eje de x

Fijamos $y = z = 0$ lo que nos deja con $3x - 12 = 0$ y por lo tanto $x = 4$. Por lo tanto el intercepto en el eje de x es el punto (4, 0, 0).

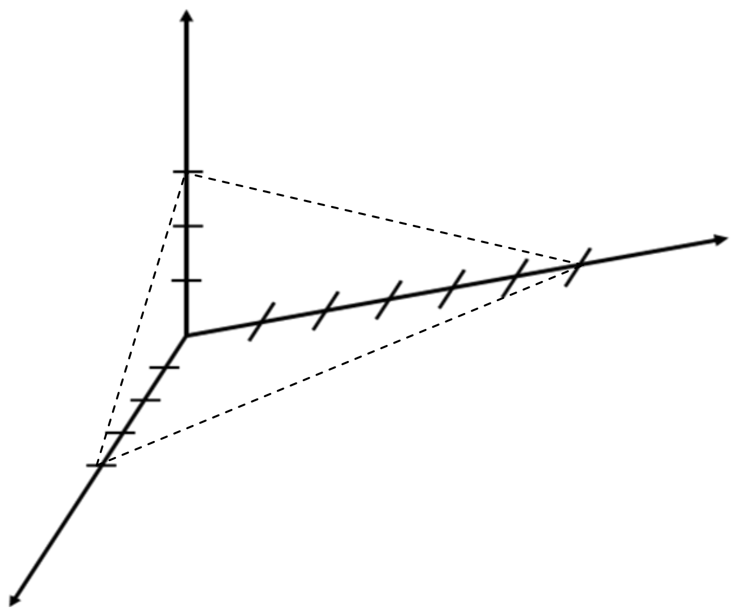
La sección triangular del plano que obtenemos es



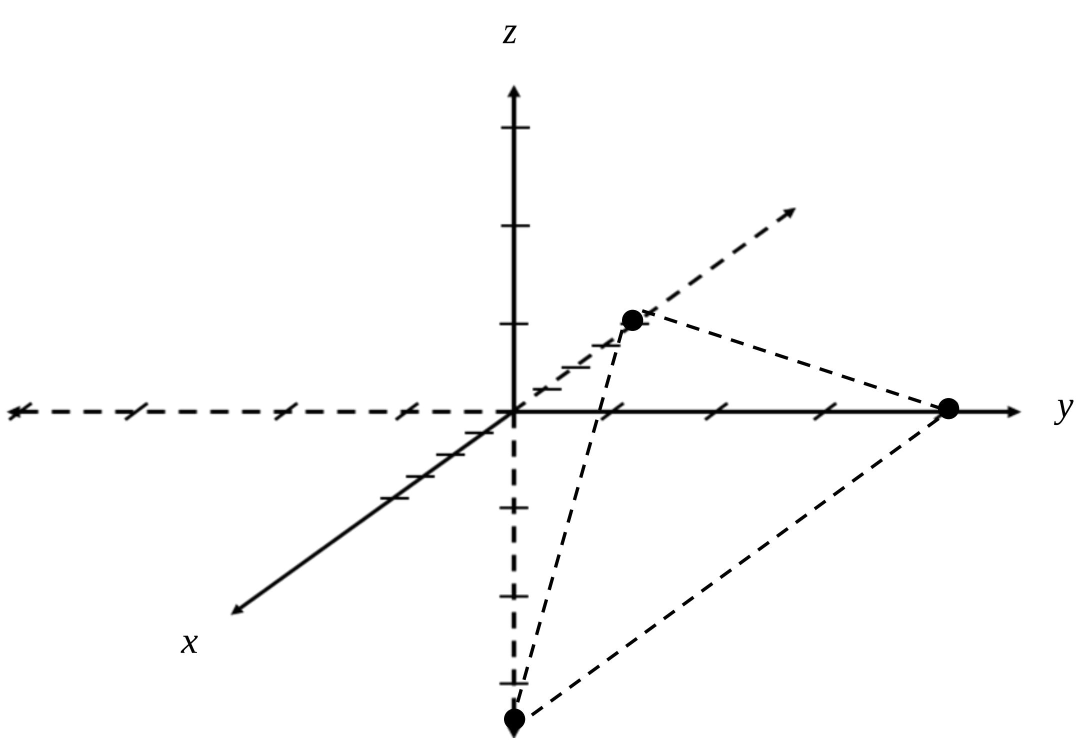
Veamos esta superficie trazada con otras opciones de sistema, primero reduciendo el ángulo entre los ejes de x & y.



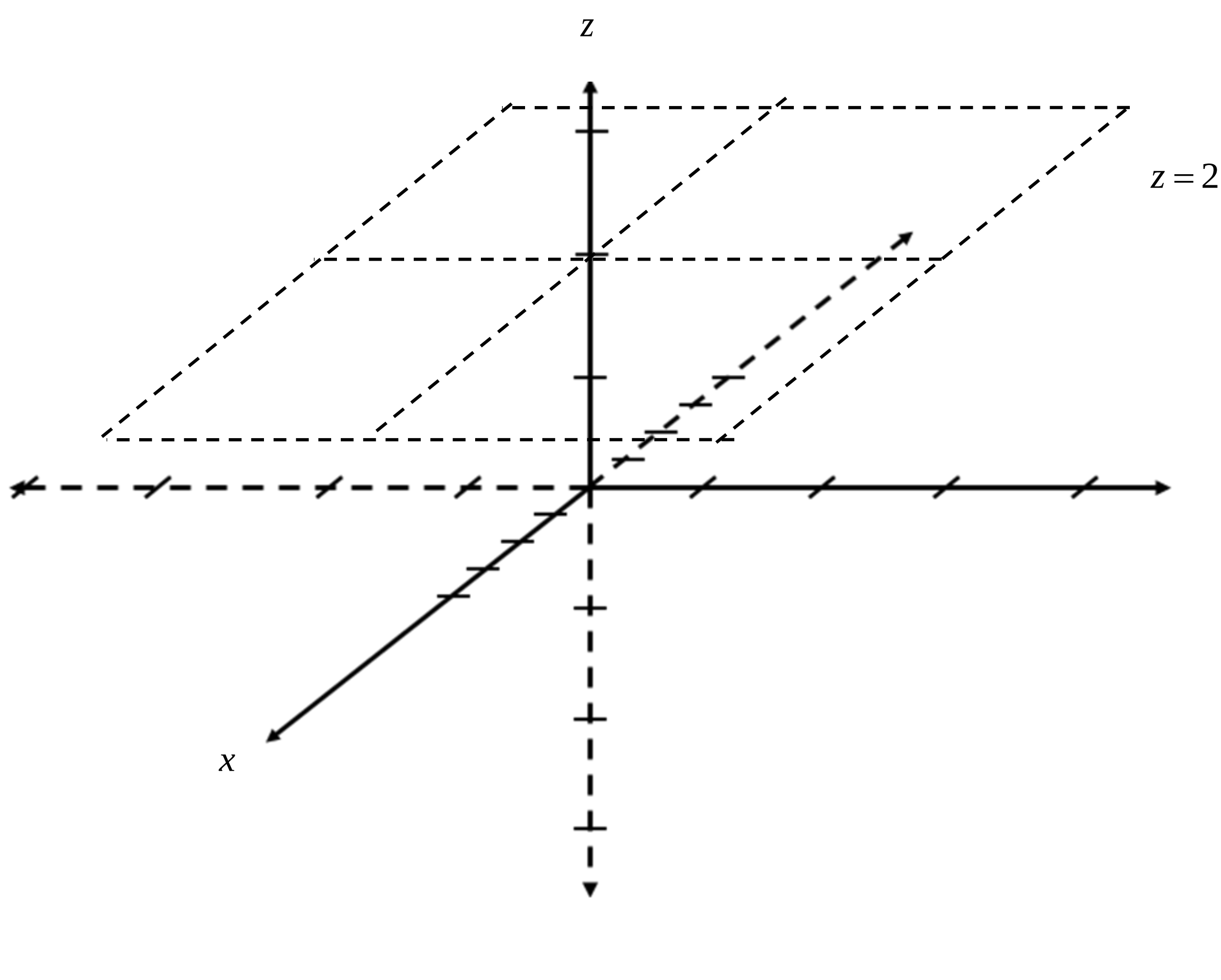
Segundo, rotando el sistema.



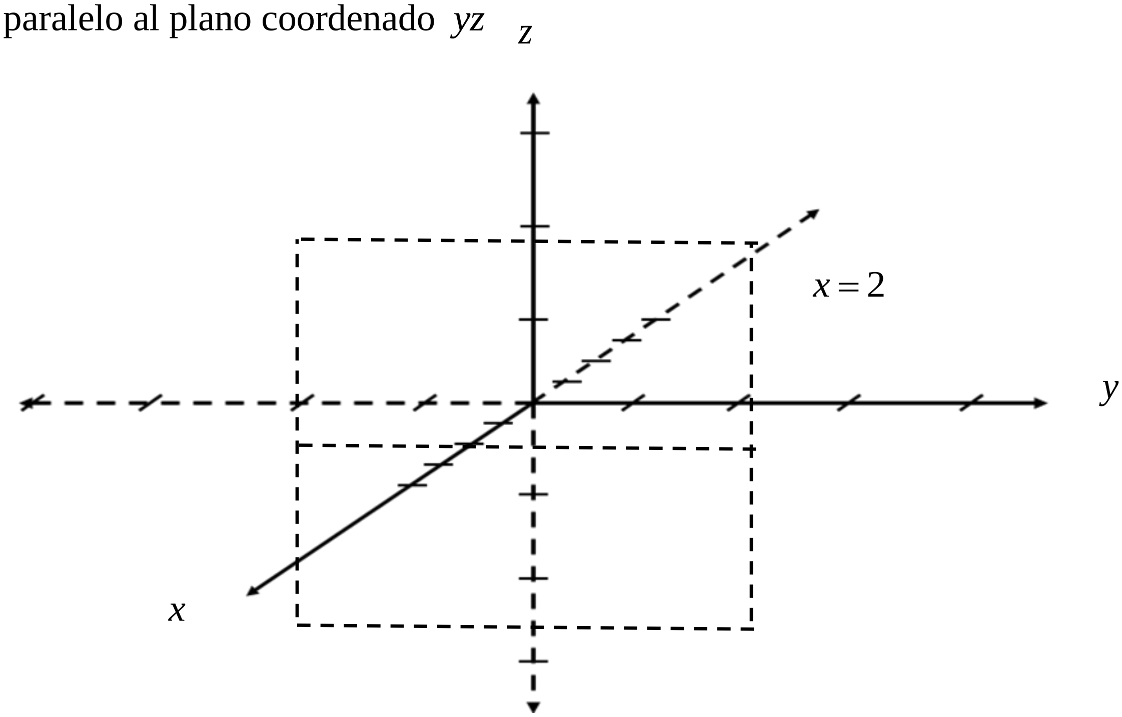
Ejemplo: Para el plano $-x+y-z-4=0$ los interceptos en los ejes coordenados son los puntos: $(-4,0,0),(0,4,0),(0,0,-4)$ por lo que obtenemos la región triangular del plano.



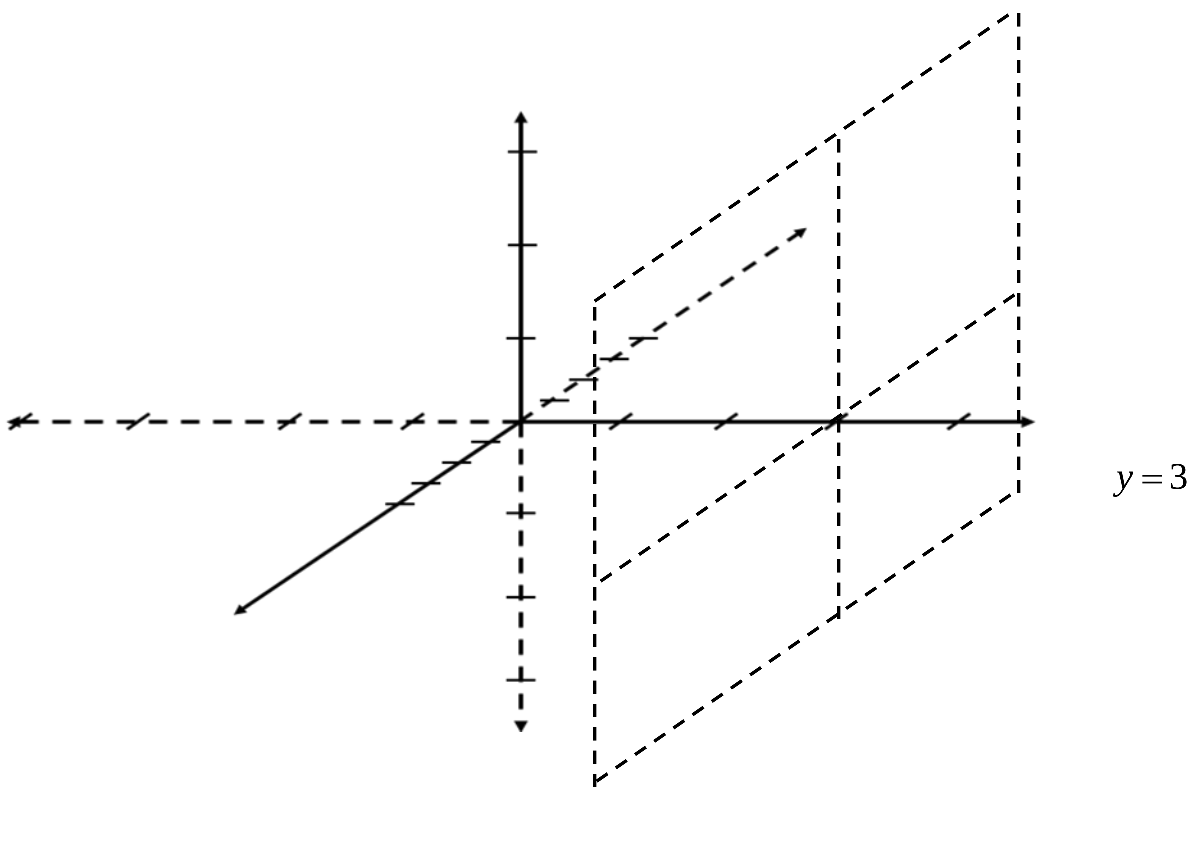
Al igual que en el plano cartesiano donde tenemos rectas verticales y horizontales en donde su ecuación solamente exhibe una variable dejando la otra libre, en este caso tenemos planos descritos por ecuaciones que sólo contienen una o dos variables en su ecuación. Por ejemplo el plano descrito por la ecuación $z=2$ donde las variables x & y no tienen restricción alguna. Los puntos en tal plano están constituidos por el conjunto $\{(x,y,z): z=2\}$ la gráfica de esta superficie es un plano paralelo al plano coordenado xy a la altura de $z=2$. Véase la siguiente gráfica



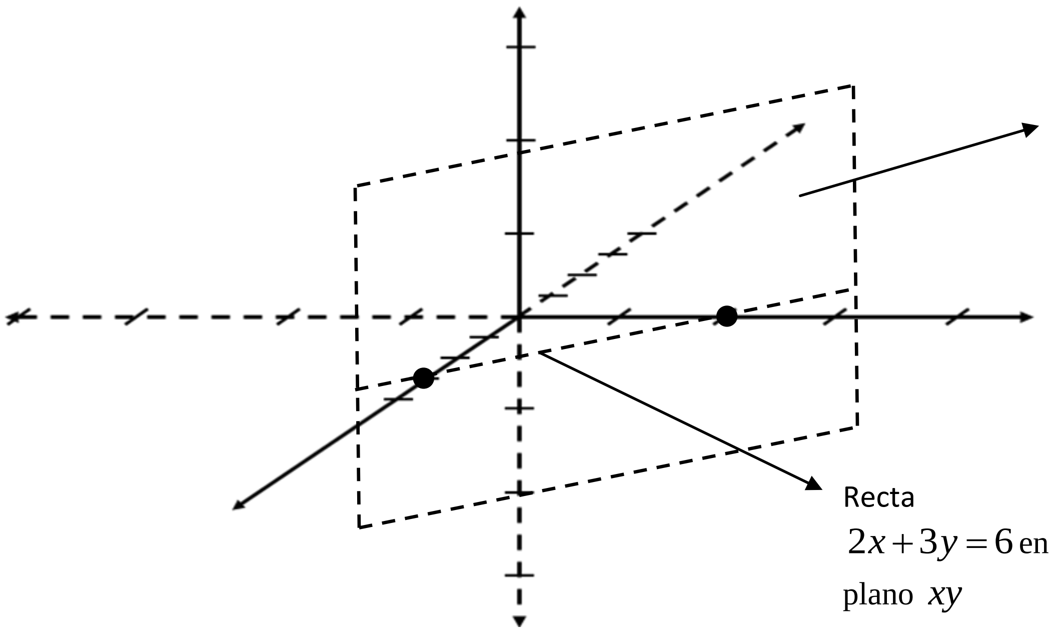
En el plano $x=2$ las variables $y\,\&\,z$ están libres y la superficie correspondiente es paralelo al plano coordenado yz



De forma análoga la superficie correspondiente a la ecuación $y=3$ es un plano paralelo al plano coordenado xz

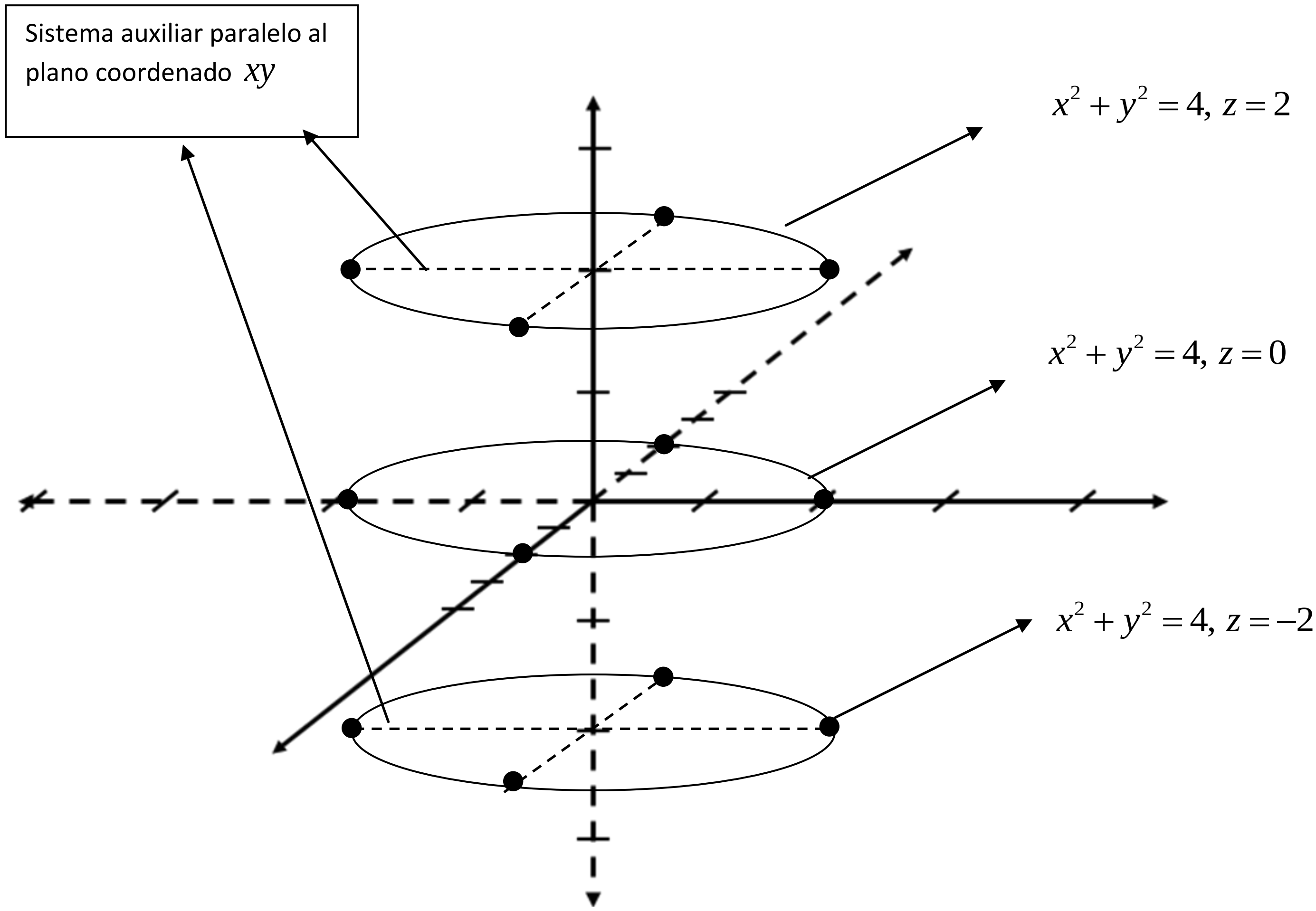


También podemos tener plano donde la ecuación contiene dos variables relacionadas y una sola variable libre, como por ejemplo, el plano descrito por la ecuación $2x+3y=6$ donde la variable z es libre. En este caso la superficie está dada por

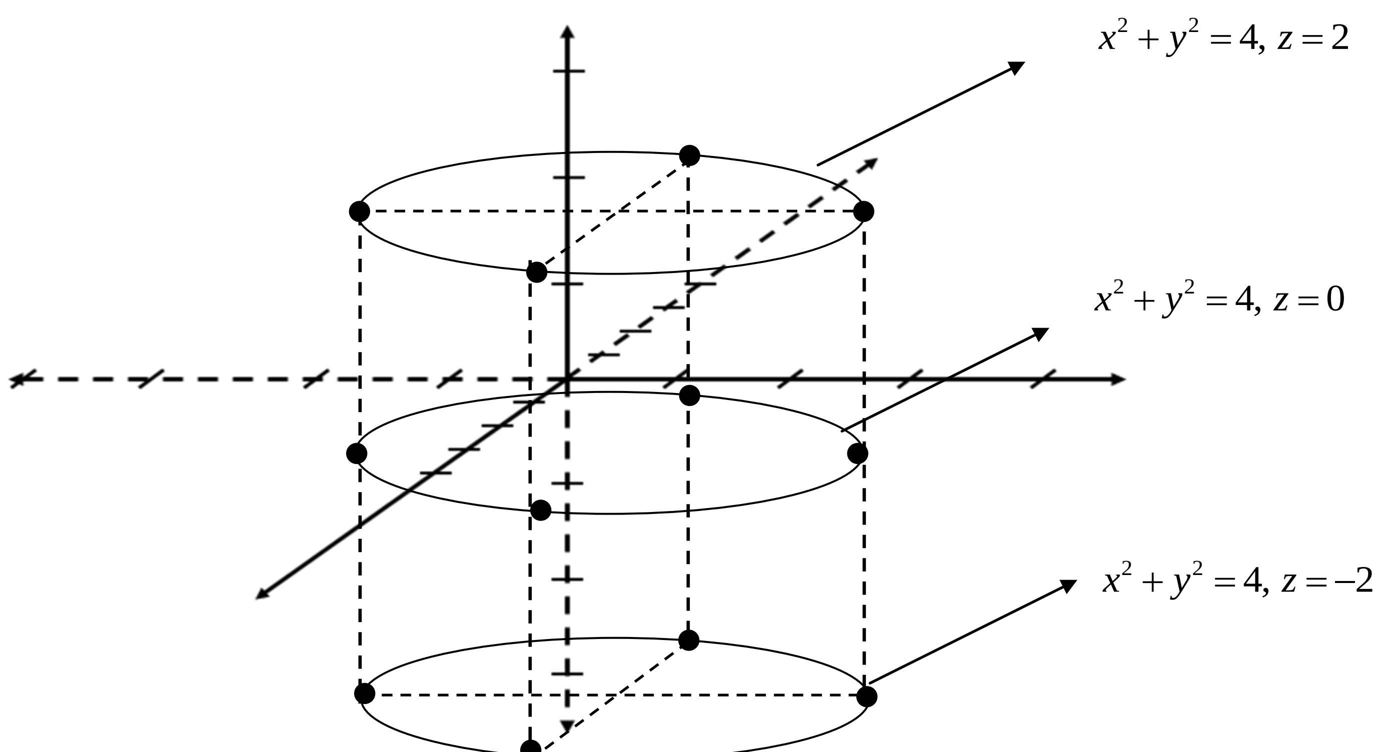


Cilindros

Un cilindro es una superficie formada por un conjunto de rectas paralelas a una recta dada y que pasan por una curva en el plano. Un cilindro es una generalización del plano. La ecuaciones cuyas superficies resultan en cilindros son aquellas que contienen dos variables pero son consideradas en tres dimensiones dejando así una variable libre (aquella que no aparece en el plano). Como primero ejemplo consideremos el cilindro asociado a la ecuación $x^2+y^2=4$, en este caso la variable z no está en la ecuación por lo que no tiene restricción alguna. Entonces la variable z puede tomar cualquier en los números. Para trazar la superficie primero trazamos varias copias de la gráfica de la curva bi-dimensional $x^2+y^2=4$. Para trazar cada copia utilizamos un sistema auxiliar paralelo al plano coordenado xy como ya veremos. Esta superficie será un cilindro circular pues la curva que todas las rectas paralelas intersecan es un círculo.

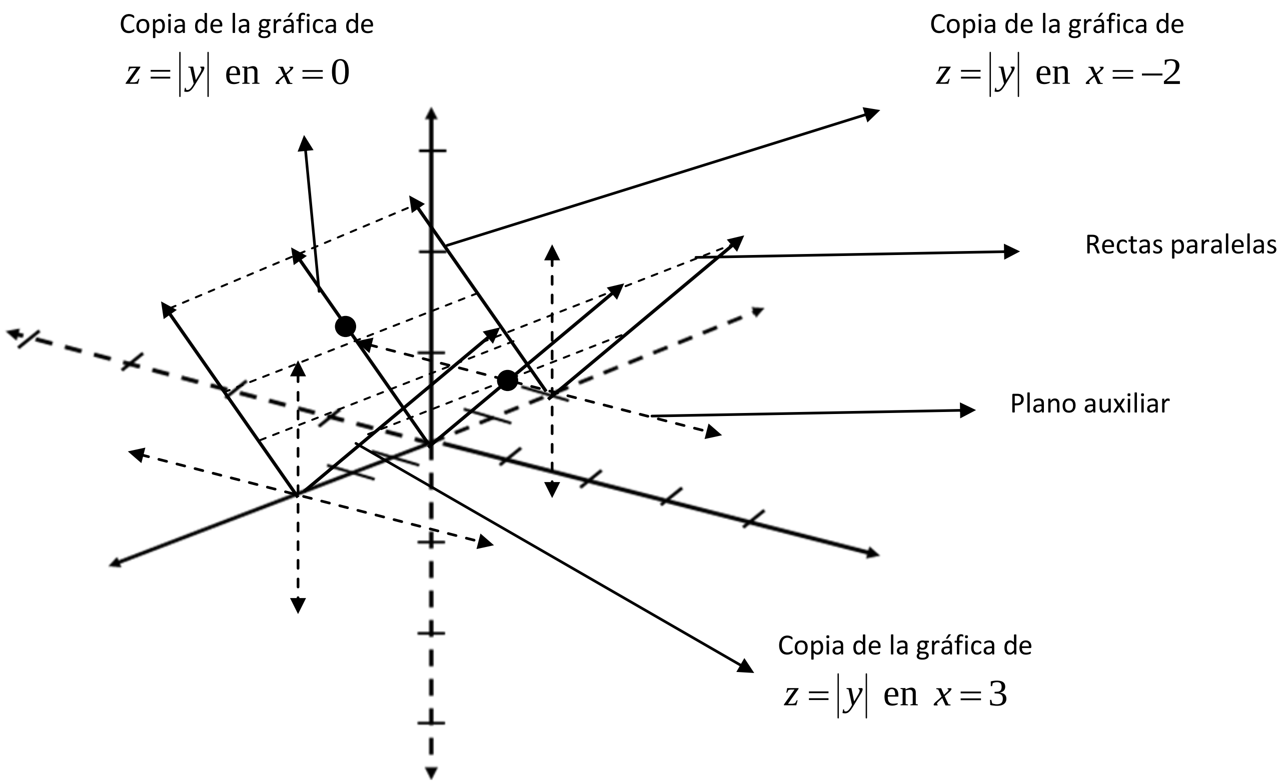


Ahora unimos los círculos con las rectas paralelas que forman el cilindro



No todos los cilindros son circulares, de hecho los planos cumplen con la definición de un cilindro. Veamos otro ejemplo.

Consideremos la superficie asociada a la ecuación $z = |y|$ donde la variable x libre pues puede tomar cualquier valor real sin restricción alguna. Para trazar esta superficie dibujamos la gráfica de $z = |y|$ para distintos valores de x (varias copias) y unimos estas gráficas con rectas paralelas que atraviesan estas gráficas. Para cada copia utilizamos un sistema cartesiano auxiliar copia del plano coordenado yz



Los cilindros trazados los hemos recortado para la visualización de la superficies pero éstos se extienden de manera infinita. En el primer ejemplo sólo en la dirección de la variable libre z, pero en el segundo ejemplo se extiende infinitamente en todas las direcciones.

Superficies Cuádricas

Este grupo de superficies son la generalización de las secciones cónicas estudiadas en el curso de precálculo. La ecuación general de estas superficies es de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

Estudiaremos casos específicos de este grupo de superficies.

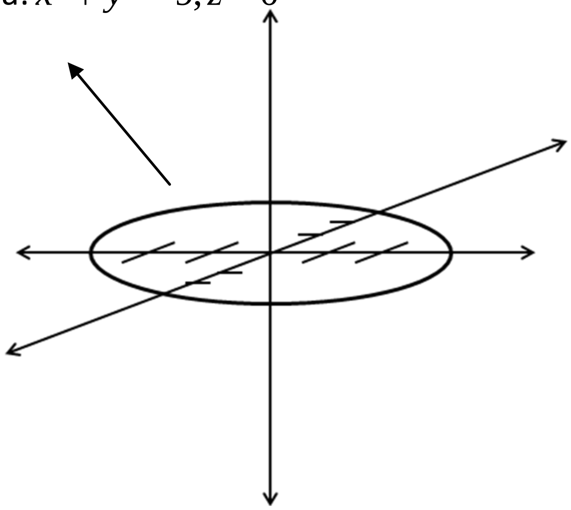
Esferas

La esfera es la generalización del círculo, la ecuación estándar de una esfera con centro (x_0, y_0, z_0) y radio R es

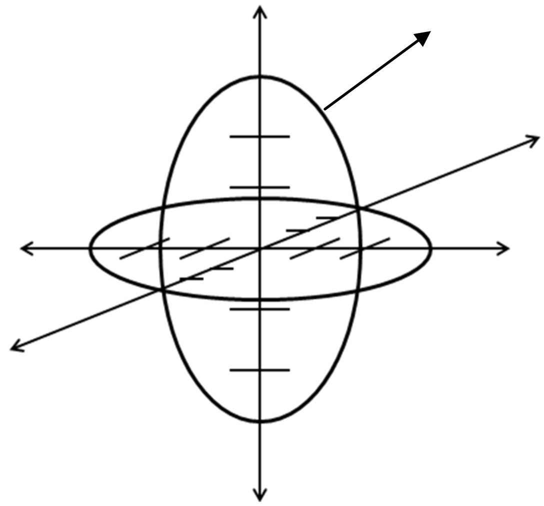
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

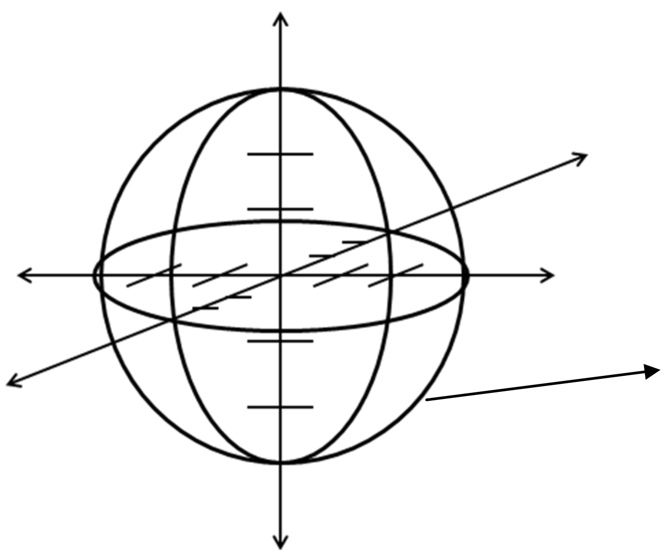
En caso de que el centro sea (0,0,0) entonces toma la ecuación toma la forma $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Para trazar las superficies cuádricas utilizamos el concepto de **trazas.** Una traza de una superficie es la gráfica de la curva en dos dimensiones que obtenemos al fijar el valor de alguna de las variables en la ecuación. En particular cuando fijamos alguna variable a 0 obtenemos la traza en el plano coordenado en las dos variables restantes. Por ejemplo, para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ si fijamos a $x = 0$ obtenemos la traza de la esfera en el plano coordenado yz dada por la curva $y^2 + z^2 = 9$, la cual es un círculo en el plano yz con centro (0,0) y radio 3. Para trazar la esfera será suficiente dibujar las tres trazas en los planos coordenados para obtener una gráfica bastante precisa. Tomemos a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Para la traza en el plano coordenado xy fijamos la $z = 0$ obteniendo el círculo $x^2 + y^2 = 9$. Para la traza en el plano coordenado xz fijamos la $y = 0$ obteniendo el círculo $x^2 + z^2 = 9$. Ya determinamos la traza restante que fue $y^2 + z^2 = 9$ en el plano coordenado yz. Ahora dibujamos todas las trazas para obtener la superficie buscada.

Traza: $x^2+y^2=9, z=0$



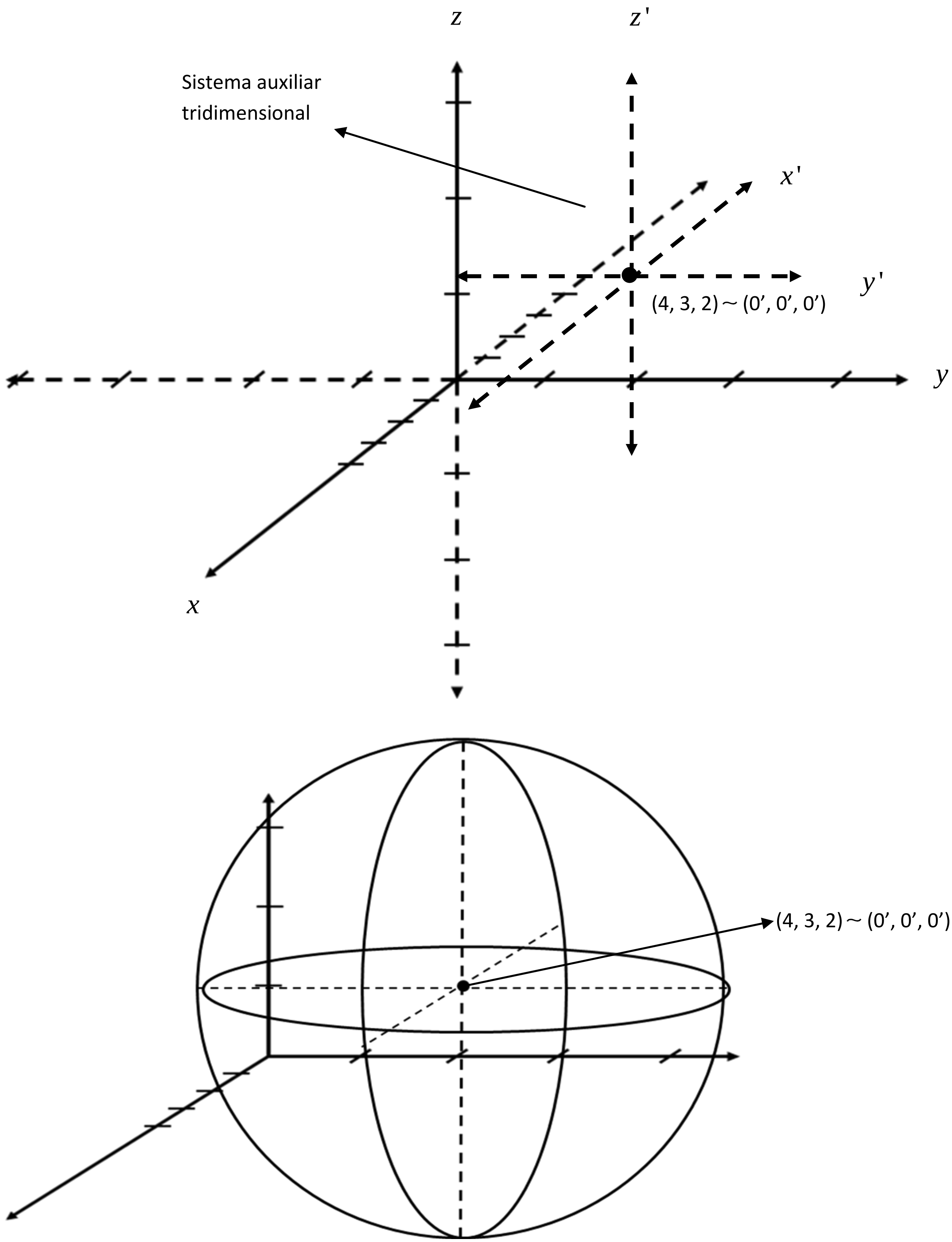
Traza: $x^2+z^2=9, y=0$





Traza: $y^2+z^2=9, x=0$

Consideremos una esfera con centro distinto del origen, por ejemplo, $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$. Para dibujar esta superficie utilizaremos un sistema auxiliar de tres dimensiones $x'y'z'$con la misma escala que el original de manera que el origen de tal sistema se a el centro de la esfera. En tal caso dejamos que $x-4=x'$, $y-3=y'$ & $z-2=z'$. En el sistema auxiliar trazamos la superficie $(x')^2+(y')^2+(z')^2=9$. En este sistema auxiliar el origen es (4,3,2) y lo denominamos por (0’,0’,0’). Veamos,


z
z'
Sistema auxiliar tridimensional
x'
y'
(4, 3, 2) ∼ (0’, 0’, 0’)
y
x
(4, 3, 2) ∼ (0’, 0’, 0’)

Elipsoides

Los elipsoides son a las esferas como las elipses a los círculos, por lo que podemos considerar las esferas como un caso especial de un elipsoide. La ecuación estándar de un elipsoide con centro (x_0, y_0, z_0) es

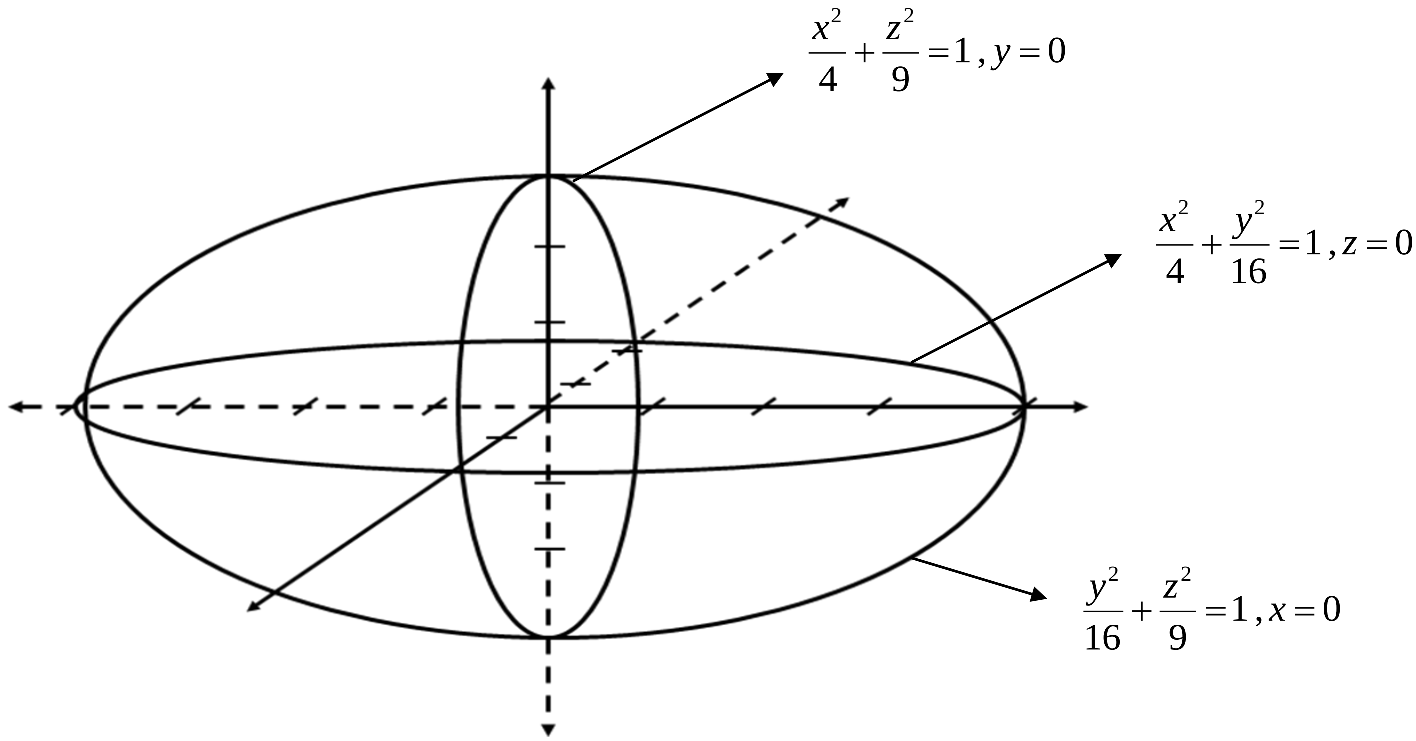
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\,,\ \ a,b,c>0$$

En caso de que $a=b=c$ obtenemos una esfera. Al igual que para las elipses tendremos un eje mayor establecido por el valor mayor de $a,b \text{ ó } c$. Si el centro es (0, 0, 0), entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\ \ a,b,c>0$$

La técnica para trazar esta superficie será parecida a la de las esferas, esto es, dibujar sus trazas en los planos coordenados. Si el centro no es (0, 0, 0), utilizamos el sistema auxiliar tridimensional para trazar la superficie.

Por ejemplo, para el elipsoide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ la traza en el plano coordenado xy está dada por $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$. En el plano coordenado xz la traza es $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ y en el plano coordenada yz es $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$. Dibujando todas las trazas obtenemos



Hiperboloides

Los hiperboloides son la generalización de las hipérbolas. Sin embargo, en este caso hay dos tipos de hiperboloides: de una y de dos hojas. Recordemos que las ecuaciones de las hipérbolas contienen un término con signo positivo y otro con signo negativo, en el proceso de generalizar añadimos un término con la variable z. El término que añadimos puede tener tanto signo positivo como negativo y de ahí surgen los dos tipos de hiperboloides. Distintos a las esferas y elipsoides que son superficies acotadas los hiperboloides no lo serán.

Hiperboloide de una hoja

La ecuación estándar de un hiperboloide de una hoja tiene dos términos con signos positivos y un término con signo negativo, este último establece la orientación del hiperboloide. Tenemos entonces tres posibles ecuaciones para el hiperboloide con centro (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

Si el centro es (0, 0, 0), entonces las ecuaciones se convierten a

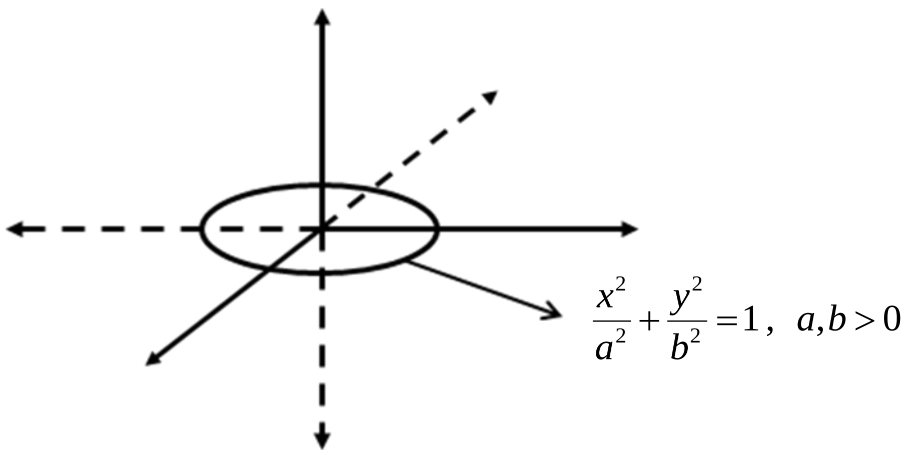
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

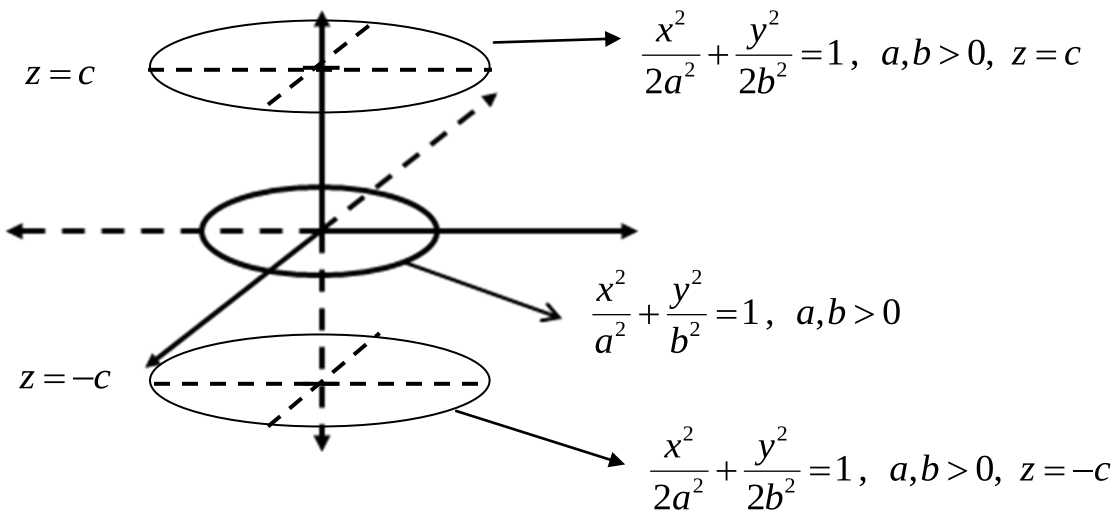
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

Tomemos el primer tipo para desarrollar la discusión, esto es, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$, veremos que esta superficie tiene una orientación visual en la dirección de la variable z, variable en la cual su término en la ecuación es el único que es negativo. Para los restantes tipos solamente veremos que tal orientación será de acuerdo a la variable cuyo término es el negativo. Nuevamente utilizaremos el concepto de trazas para dibujar la superficie. Establecemos un orden en la búsqueda de la traza

1ero: Determine y dibuje la traza en el plano coordenado de las variables de los términos que tienen signos positivos. En este caso, el plano xy, dejamos que $z=0$ para obtener la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$.



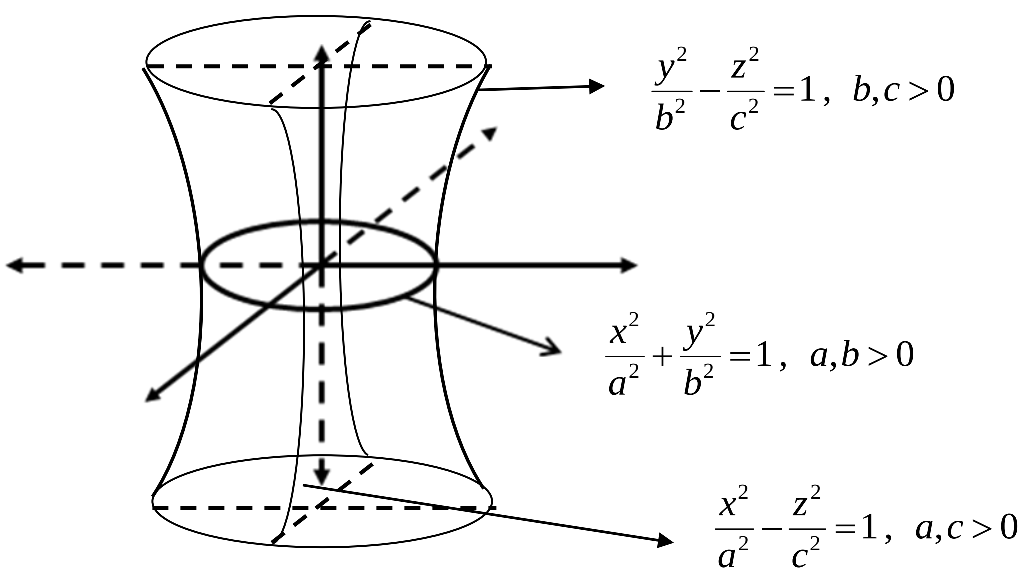
2ndo: Determine y dibuje las trazas de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $a,b,c>0$ para los valores de $z=\pm c$. La selección de estos valores es para simplificar los cómputos, bien pudiéramos seleccionar otros valores para la variable z. Vea que al sustituir $z=\pm c$ obtenemos las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2$, $a,b>0$ que podemos reescribir como $\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1$, $a,b>0$. Para dibujar estas trazas utilizamos un sistema auxiliar bi-dimensional paralelo al plano coordenado xy a la altura de $z=c$ y $z=-c$.



3ro: Determinamos y dibujamos las trazas en los plano coordenados xz & yz.

Para la primera sustituimos $y = 0$ obteniendo la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \ a,c > 0$.

Sustituyendo $x = 0$ obtenemos la traza hiperbólica $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \ b,c > 0$ en el plano coordenado yz.

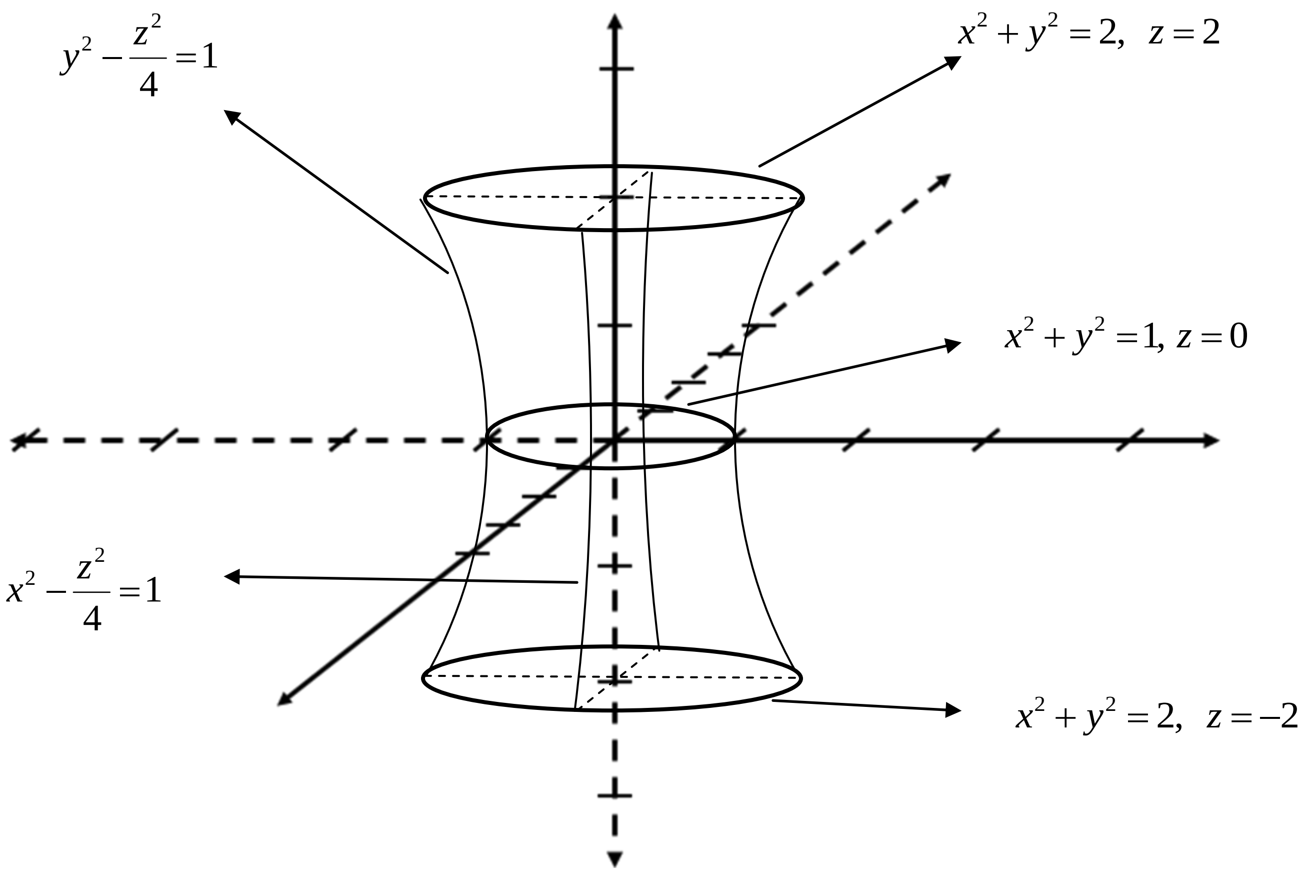


Ejemplo: $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$

1ero: cuando $z=0$ obtenemos como traza el círculo $x^2+y^2=1$(caso particular de una elipse)

2ndo: para $z=\pm 2$, la trazas obtenidas son los círculos $x^2+y^2=2$

3ro; Las trazas hiperbólicas las obtenemos sustituyendo $x=0$ que nos provee la hiperbóla $y^2-\frac{z^2}{4}=1$ en el plano coordenado yz y cuando sustituimos $y=0$ obtenemos la hiperbóla $x^2-\frac{z^2}{4}=1$ en el plano coordenado xz.



En caso de que el centro no sea (0, 0, 0) utilizamos un sistema auxiliar en tres dimensiones al igual que para la esfera.

Hiperboloide de dos hojas. La ecuación estándar de un hiperboloide de dos hojas tiene dos términos con signos negativos y un término con signo positivo, este último establece la orientación del hiperboloide. Tenemos entonces tres posibles ecuaciones para el hiperboloide con centro (x_0, y_0, z_0)

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

Si el centro es (0, 0, 0), entonces las ecuaciones se convierten a

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

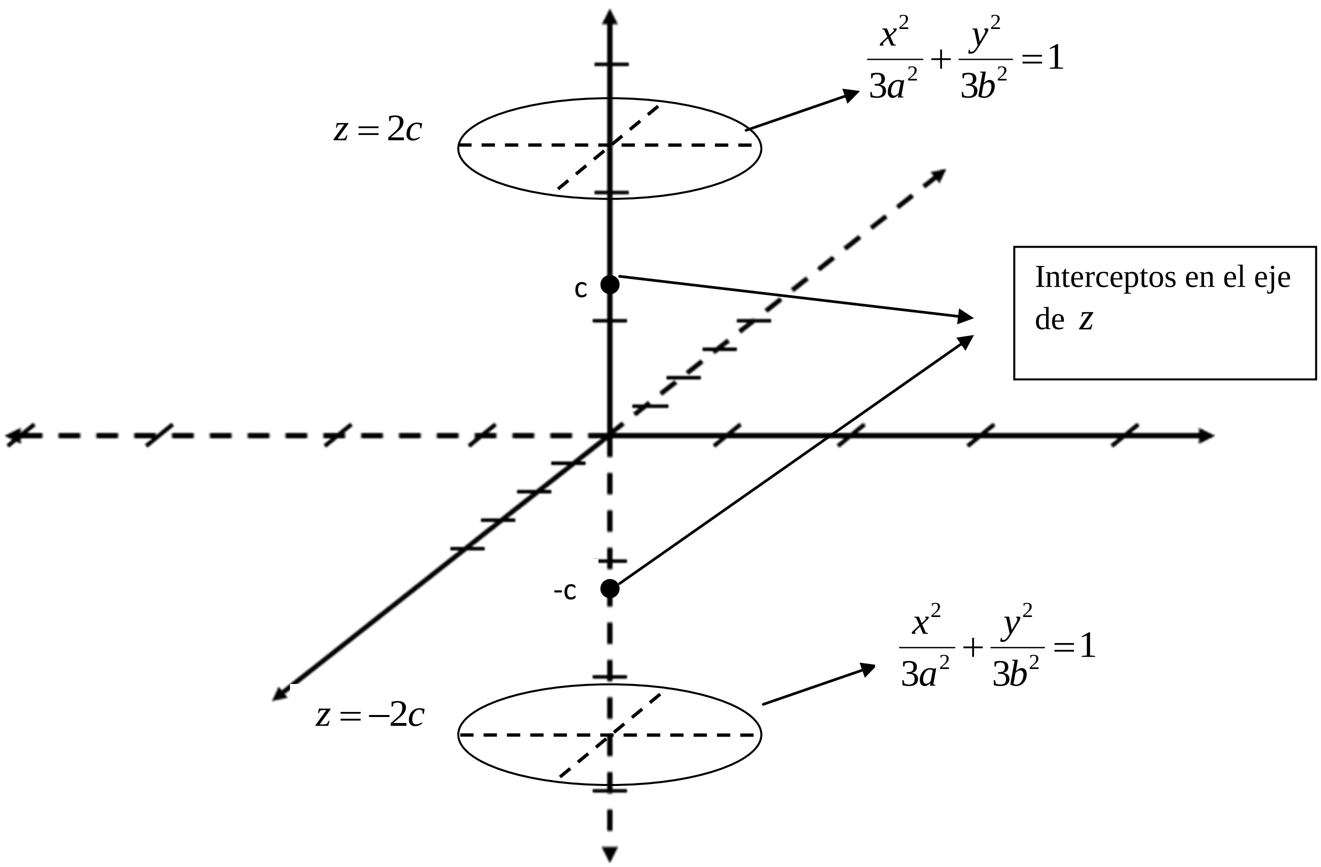
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$$

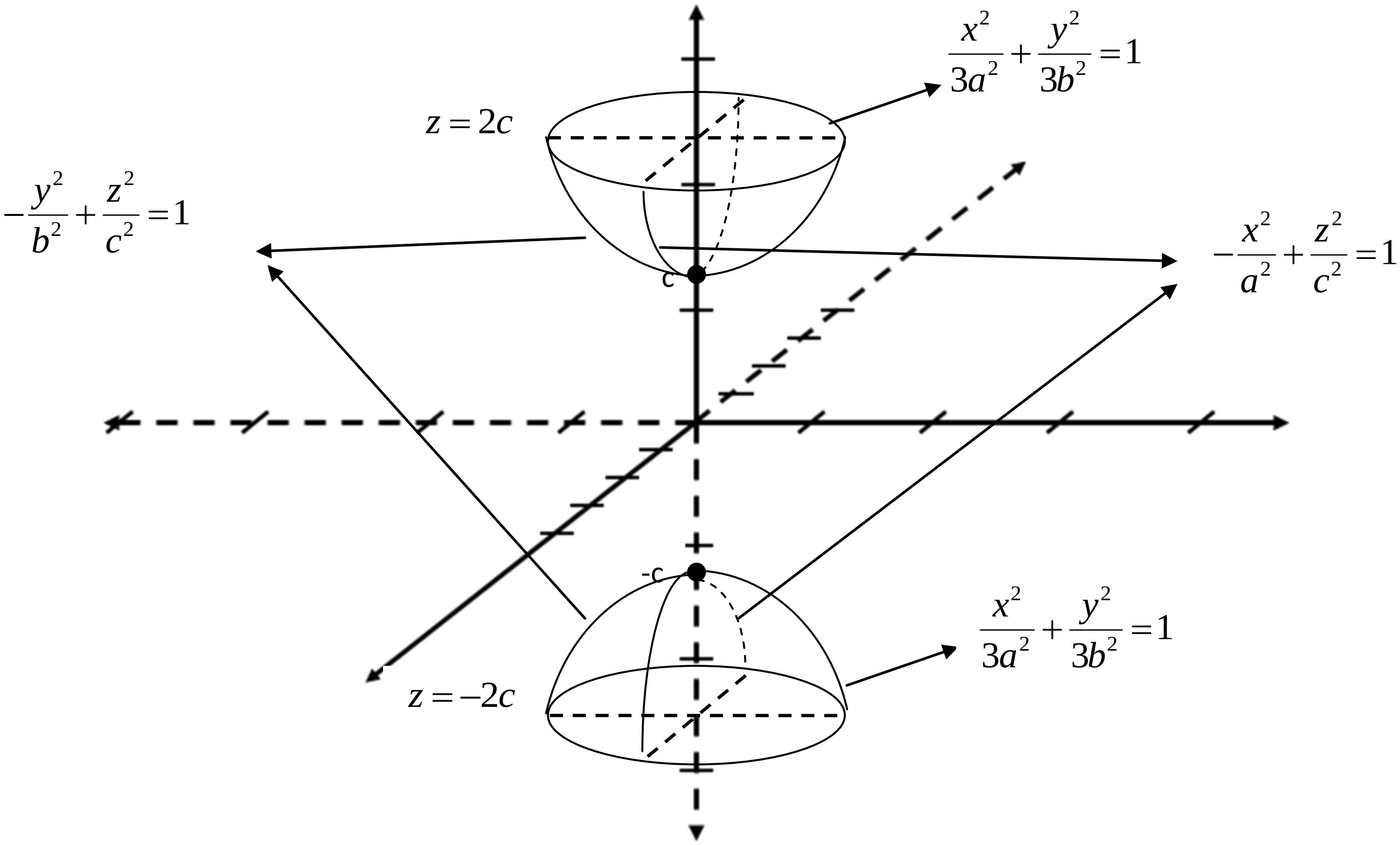
Utilizamos el primer tipo con centro (0, 0, 0), el cual mostrará una orientación visual en la dirección de la variable z, para la discusión de cómo trazar la superficie. Establecemos un orden para el proceso de dibujar
$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\;\; a,b,c>0$.

1ero; Determine los interceptos en el eje de z, para ello dejamos que $x=y=0$ obteniendo $z=\pm c$ .Por lo que los interceptos son los puntos (0,0,c) y (0,0,-c).

2do: Determine y dibuje las trazas para $z=\pm 2c$. Sustituyendo $z=\pm 2c$ obtenemos $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-3$ y por lo tanto $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=3$ lo que podemos reescribir como $\frac{x^2}{3a^2}+\frac{y^2}{3b^2}=1$. Tenemos entonces que estas trazas son elipses para las cuales utilizaremos sistemas auxiliares bi-dimensionales paralelos al plano coordenado xy para ayudarnos a trazarlas.



3ero: Determine y dibuje las trazas en los plano coordenados xz & yz. Para la primera dejamos que $y=0$ en $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ obteniendo la hipérbola $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Análogamente para la segunda traza dejamos que $x=0$ lo que nos deja con $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

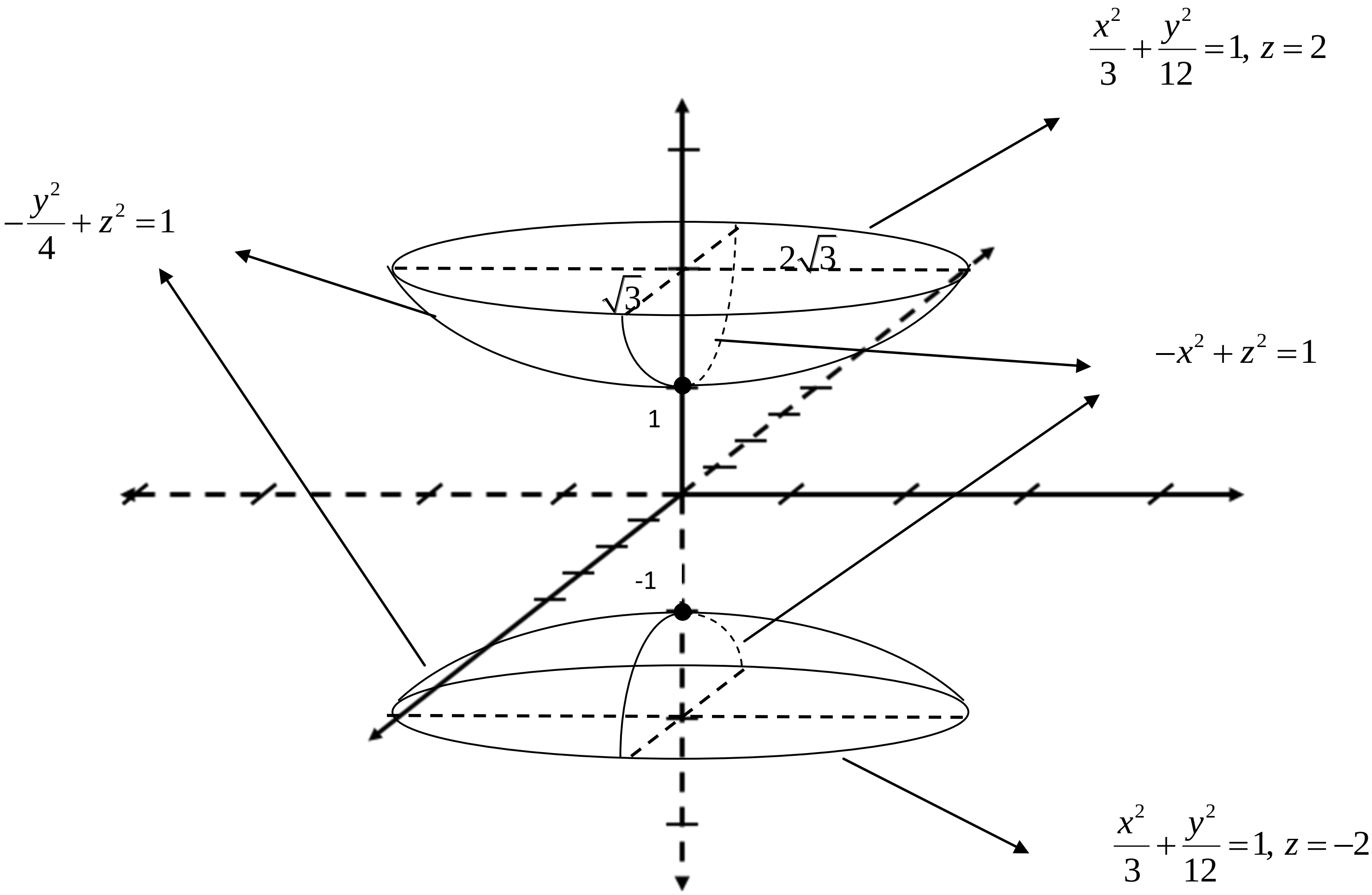


Ejemplo: $-x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$. En este caso $c=1$ or lo que $2c=2$.

1ero: los interceptos en el eje de z son los puntos (0,0,1) y (0,0,0,-1)

2ndo: las trazas para $z=\pm 2c=\pm 2$ son $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$

3ro: la traza en el plano coordenado xz es la hipérbola $-x^2+z^2=1$ y en el plano coordenado yz es la hipérbola $-\frac{y^2}{4}+z^2=1$



Cono Elíptico

Un como elíptico tiene la forma de la superficie de un reloj de arena que se extiende de manera infinita en la dirección de su orientación y su ecuación tiene tres versiones al igual que otras ya vistas dependiendo de la orientación de ella. Un cono elíptico con centro (x_0, y_0, z_0) tiene tres posibles ecuaciones:

$$(z-z_0)^2=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2},\ a,b>0$$

$$(x-x_0)^2=\frac{(z-z_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2},\ a,b>0$$

$$(y-y_0)^2=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{b^2},\ a,b>0$$

La orientación de la superficie es en la variable cuadrática por la cual está despejada la ecuación, por ejemplo, el primer caso su orientación es vertical.

Si el centro es (0, 0, 0) las ecuaciones se simplifican a

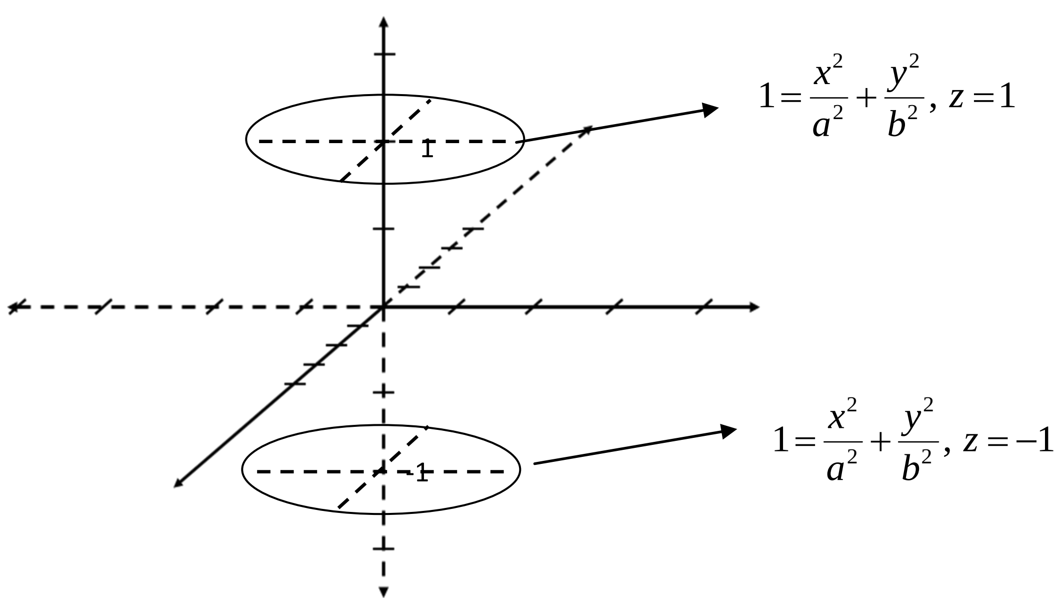
$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a,b > 0$$

$$x^2 = \frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a,b > 0$$

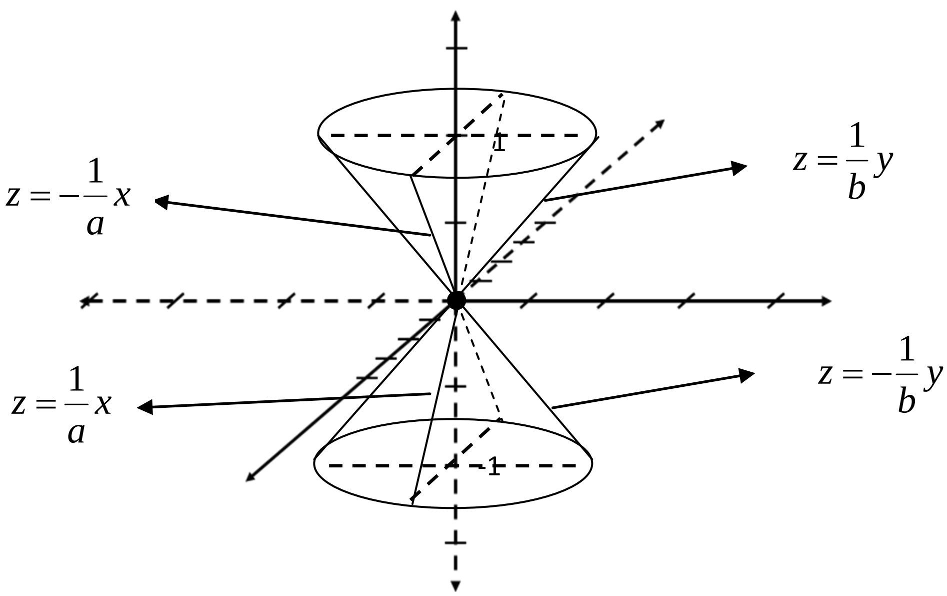
$$y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2},\ a,b > 0$$

Tomando el caso $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a,b > 0$ para el análisis del trazado de esta superficie

1ero: Determine y dibuje las trazas para los valores de $z = \pm 1$, obtenemos $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Podemos seleccionar otros valores para z pero la selección hecha es muy conveniente. Sin, embargo pudiéramos necesitar alterar la escala en el eje de z para la visualización de la gráfica.



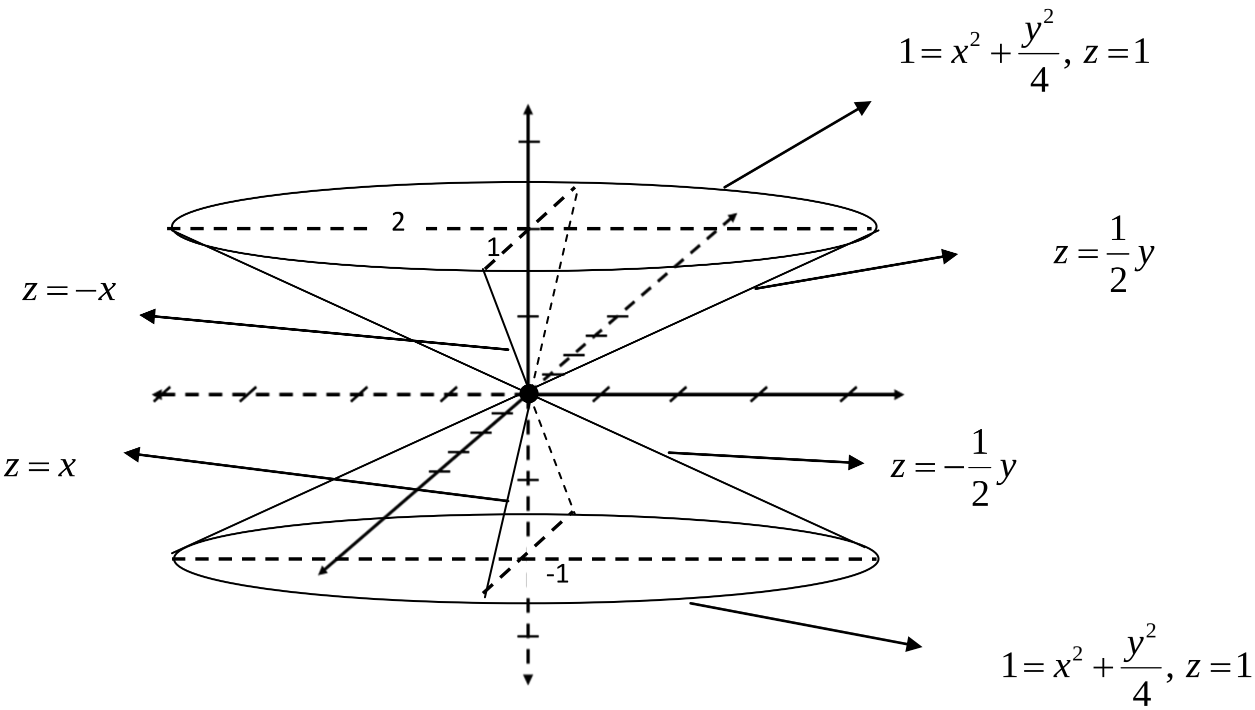
2ndo: Determine y dibuje las trazas en los planos coordenados: en el plano $xy(z=0)$ la traza se reduce al punto (0,0,0) , en el plano $xz(y=0)$ obtenemos $z^2=\frac{x^2}{a^2}$ ó $z=\pm\frac{1}{a}x$ las cuales son rectas que pasan por el origen . Análogamente, en el plano $yz(x=0)$ obtenemos $z=\pm\frac{1}{b}y$



Ejemplo: $z^2=x^2+\frac{y^2}{4}$

1ero: Dejando que $z=\pm 1$ obtenemos como trazas a $1=x^2+\frac{y^2}{4}$.

2ndo: Para $y=0$ obtenemos la traza $z=\pm x$ en el plano coordenado xz y en el plano coordenado para $yz(x=0)$ las trazas rectilíneas $z=\pm\frac{1}{2}y$. Tenemos entonces la superficie



Paraboloide Elíptico

Ex la extensión de la parábola a tres dimensiones y la encontramos en nuestra vida cotidiana en, por ejemplo, las antenas parabólicas de transmisión y en los focos de iluminación de los autos. Esta superficie se extiende infinitamente en la dirección de su orientación. La ecuación de un paraboloide elíptico contiene una variable lineal (la cual establece la orientación) y dos cuadráticas. Si su vértice es (x_0, y_0, z_0) entonces las versiones son

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2},\ a,b > 0$$

$$x - x_0 = \frac{(z - z_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2},\ a,b > 0$$

$$y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2},\ a,b > 0$$

Si el vértice es el punto (0,0,0) entonces obtenemos

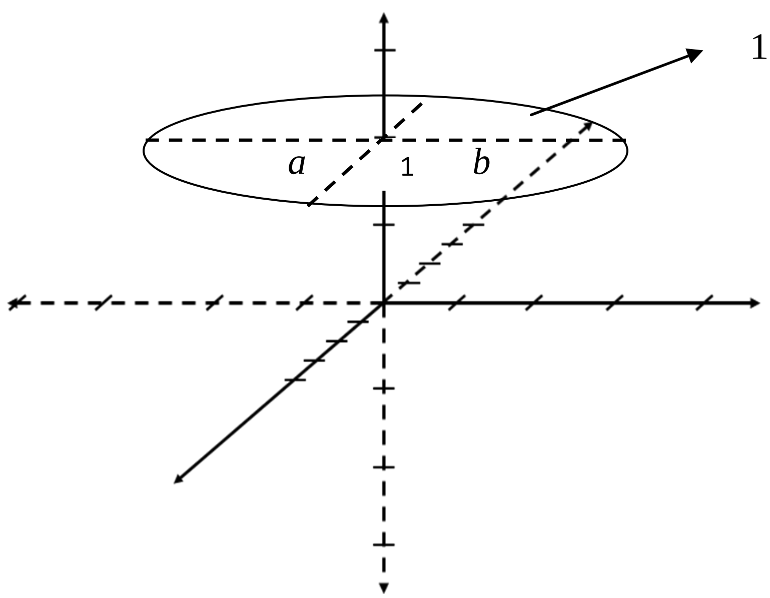
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a,b > 0$$

$$x = \frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a,b > 0$$

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2},\ a,b > 0$$

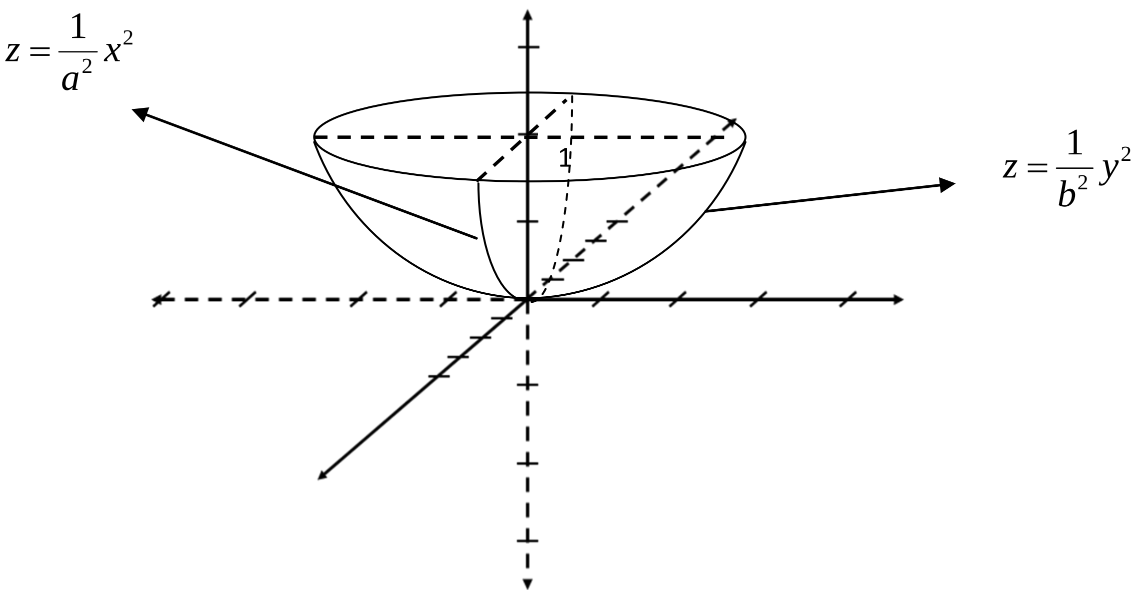
Para el análisis del trazado de esta superficie utilizamos a $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a,b > 0$.

1ero: Dibuje la traza para $z = 1$(podemos seleccionar otros valores para z, ello agrandaría la gráfica) la selección tomada simplifica los cómputos. La gráfica a trazar es la elipse (pudiera ser un círculo)$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a,b > 0$.



$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ z = 1$$

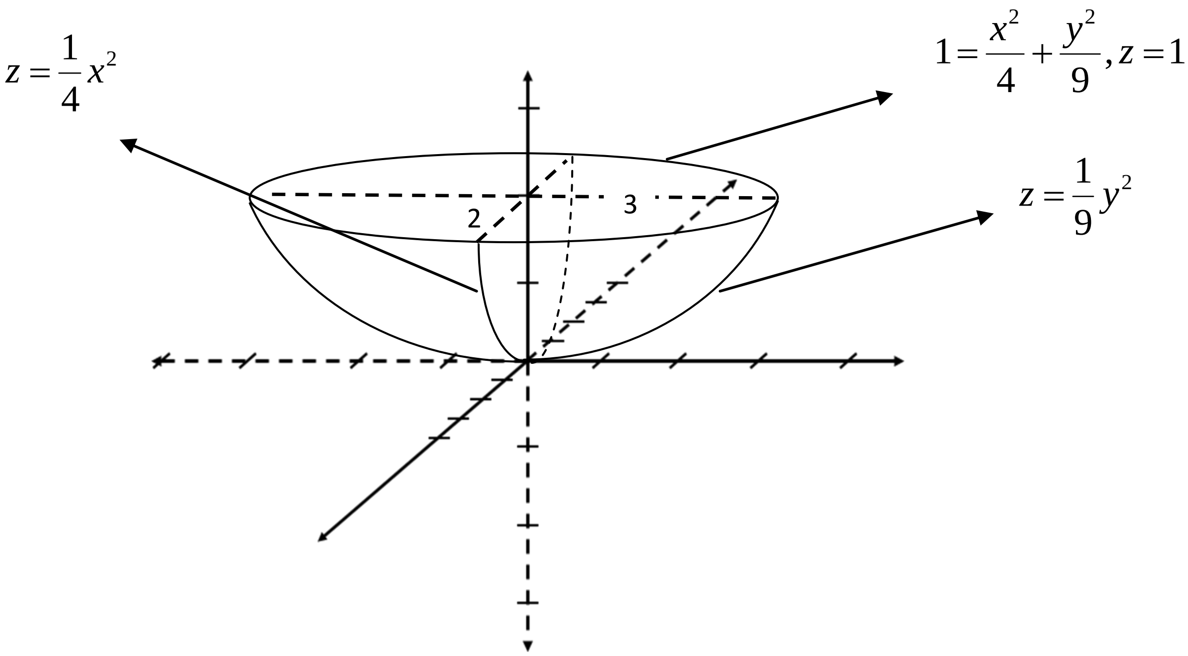
2ndo: Dibuje las trazas en los planos coordenados, para el plano $xy(z=0)$ solamente obtenemos el punto (0,0,0). En el plano coordenado $yz(x=0)$ la traza es la parábola $z=\frac{1}{b^2}y^2$. Por último $z=\frac{1}{a^2}x^2$ es la traza en el plano coordenado $xz(y=0)$.



Ejemplo: $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$

1ero: Para $z=1$ obtenemos la traza $1=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

2ndo: Para $x=0$ (plano coordenado yz) obtenemos $z=\frac{1}{9}y^2$ & para $y=0$ (plano coordenado xz) $z=\frac{1}{4}x^2$.



Paraboloide Hiperbólico

Esta superficie es más complejo para trazar pues combina parábolas e hipérbolas en sus forma además se asemeja a una silla de montar a caballo. Su ecuación al igual que la del paraboloide elíptico contiene una variable lineal y dos cuadráticas, pero las dos cuadráticas se restan generando así el componente hiperbólico de la superficie. Además tiene un punto en gráfica que es tanto un punto máximo como punto mínimo en la superficie, algo que en dos dimensiones no tenemos su ocurrencia.

Si el punto máximo-mínimo se encuentra en el origen la ecuación tiene las siguientes tres vertientes

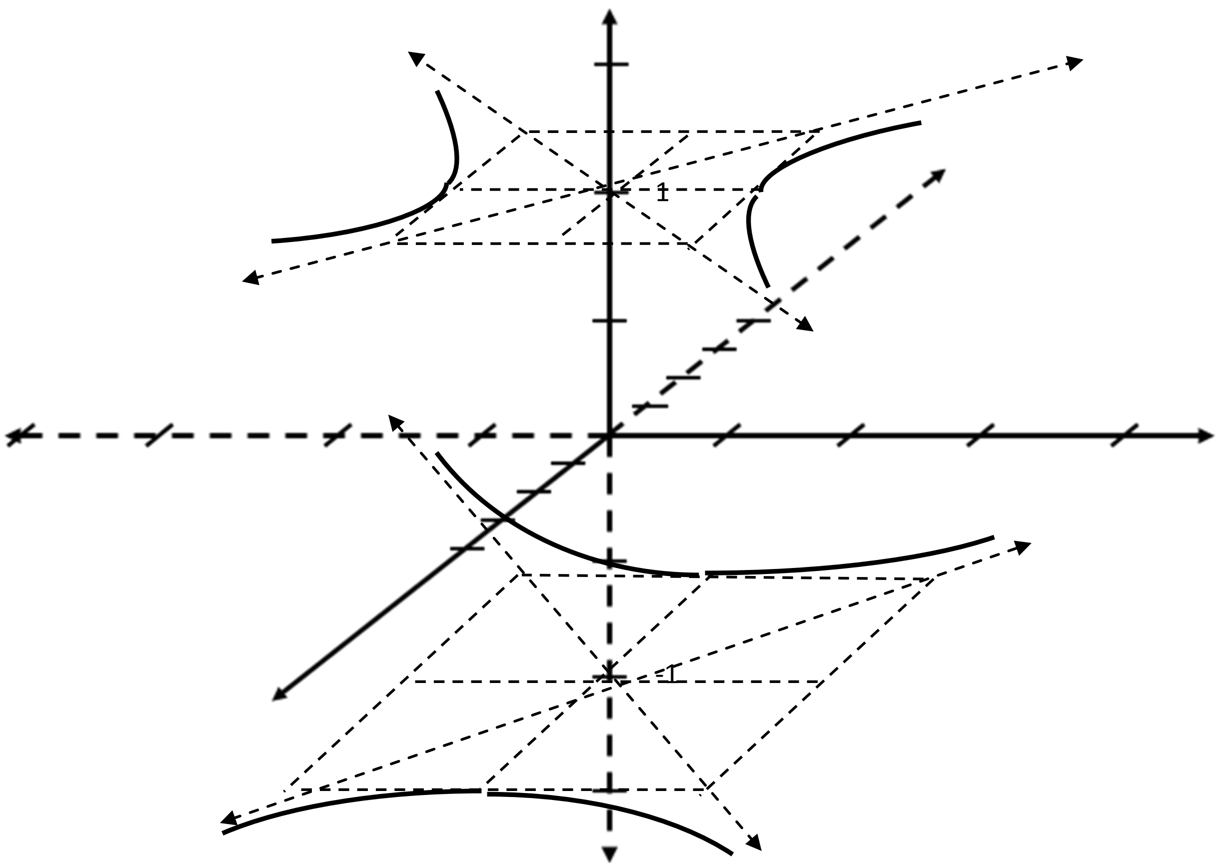
$$z=\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2},\ a,b>0\left(ó\ z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$x=\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\ a,b>0\left(ó\ x=\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)$$

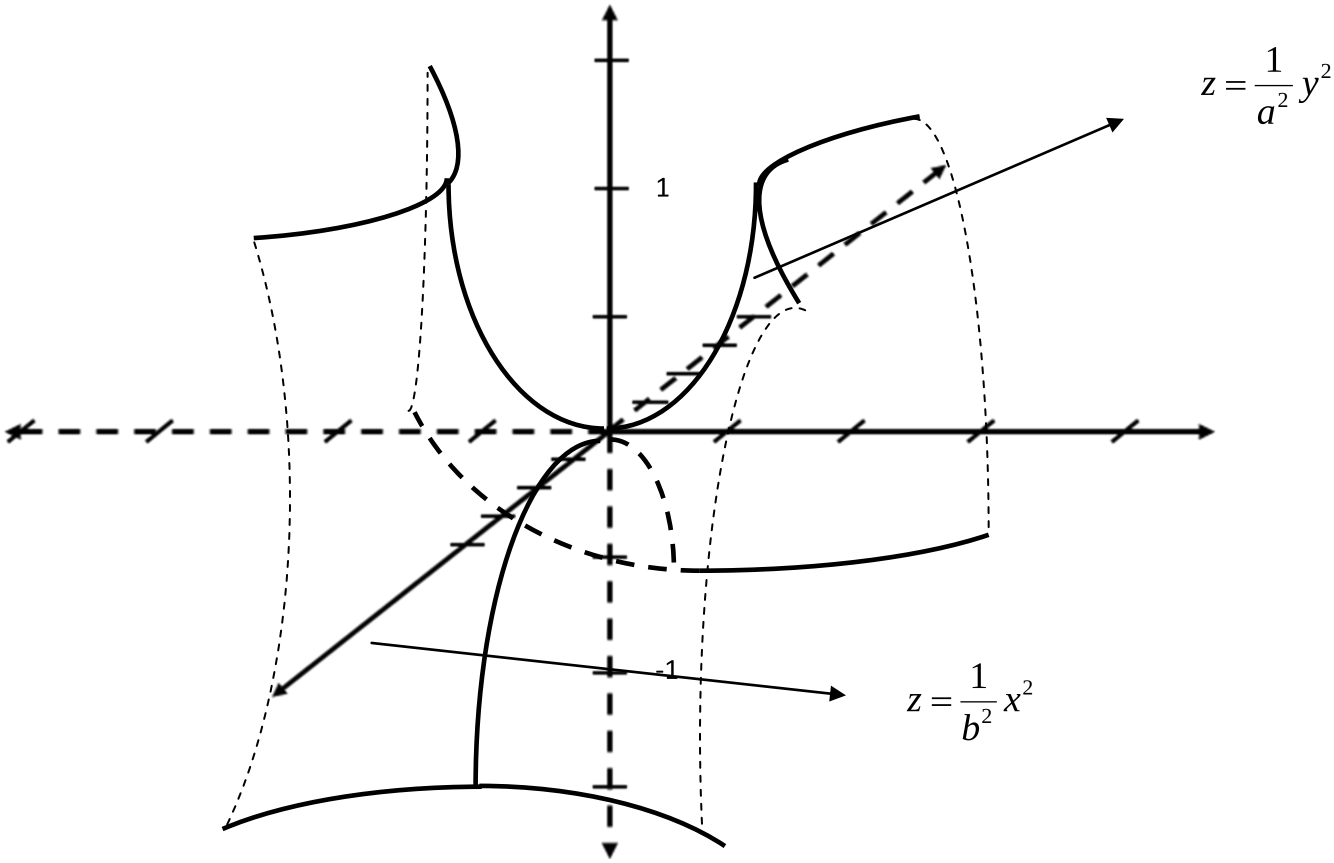
$$y=\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2},\ a,b>0\left(ó\ y=\frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

Si tal punto no está en el origen entonces trabajamos un sistema auxiliar tridimensional como para los casos anteriores. Analicemos el caso $z=\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}$, $a,b>0$ **.**

1ero: Dibujemos las trazas para $z=\pm 1$, esto es , las hipérbolas $1=\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}$ **&** $1=\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}$. Para ello necesitaremos el rectángulo fundamental y las asíntotas de las hipérbolas



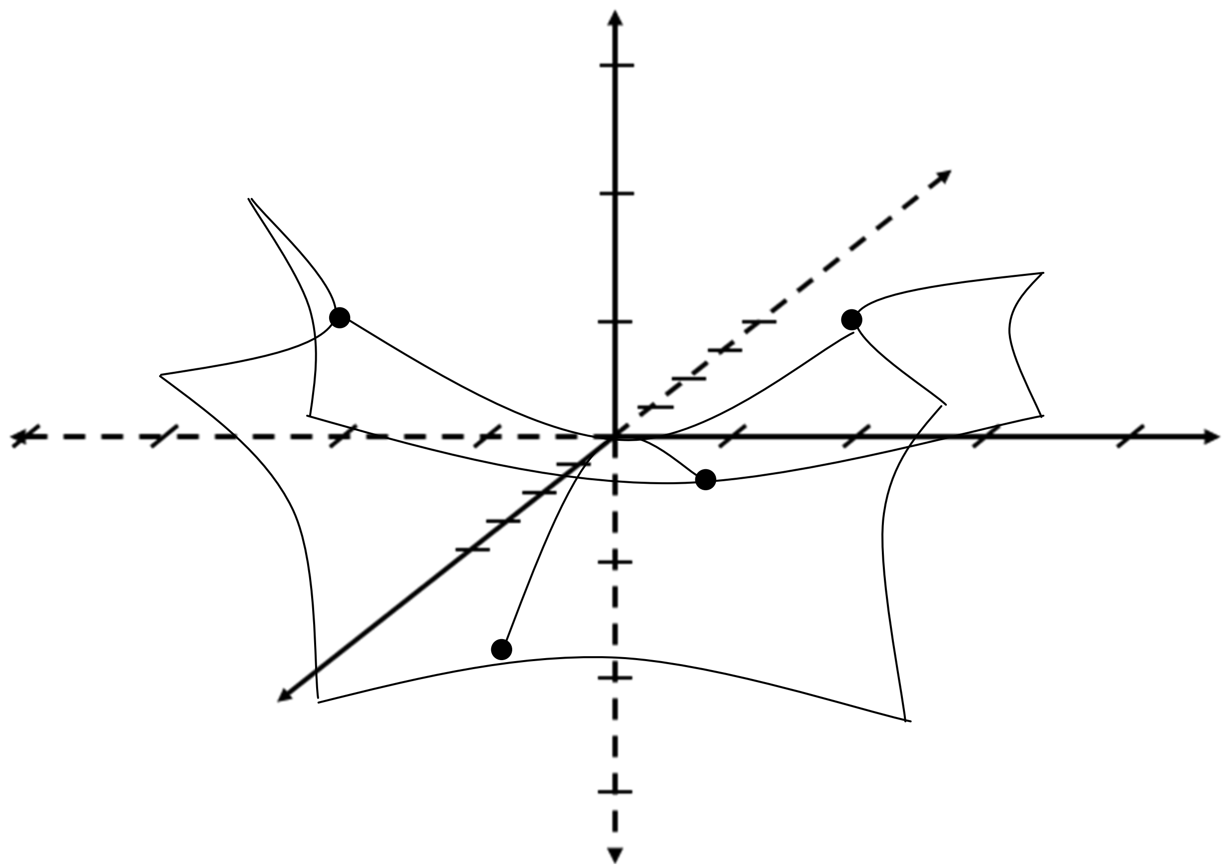
2ndo: Dibuje las trazas en los planos coordenados $yz\,(x=0)\,\&\,xz(y=0)$. La primera es la parábola $z=\frac{1}{a^2}y^2$ y la segunda es la parábola $z=-\frac{1}{b^2}x^2$**.** Además añada las curvas necesaria para unir las trazas hiperbólicas y simular cortes de la superficie que se extiende de manera infinita.



Ejemplo: $z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$

1ero: Para $z = 1$ obtenemos la traza hiperbólica $1 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$. Para $z = -1$ obtenemos la traza hiperbólica $-1 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$ ó $1 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$.

2ndo: Para $x = 0$ obtenemos la traza parabólica $z = \frac{y^2}{4}$ & para $y = 0$ obtenemos $z = -\frac{x^2}{9}$.



En resumen , para trazar una superficie en el espacio cartesiano debemos tener en cuenta:

1) Reconocer la superficie a trazar y sus características
2) La orientación de la superficie, si alguna
3) Identificar si la superficie es una traslación , en cuyo caso debemos utilizar un sistema auxiliar tridimensional.
4) Utilizar sistemas auxiliares para dibujar las trazas necesarias
5) Cambiar la escala en los ejes , el ángulo entre los ejes de x & de y en combinación con una posible rotación del espacio cartesiano para visualizar mejor la superficie.

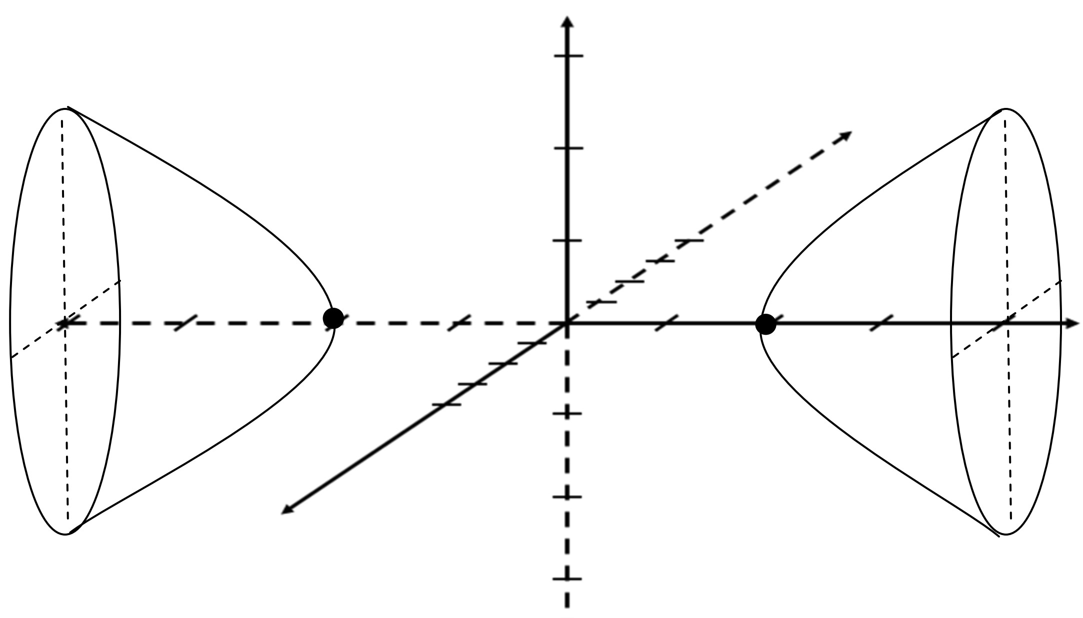
Otros ejemplos:

1) Considere la ecuación general $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$. Para identificar la superficie necesitamos escribir la ecuación en forma estándar. Reescribimos $4 = -4x^2 + y^2 - 2z^2$ para luego obtener $1 = -x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2}$, por lo que obtenemos un hiperboloide de dos hojas con centro (0, 0 ,0) orientada en el eje de y.

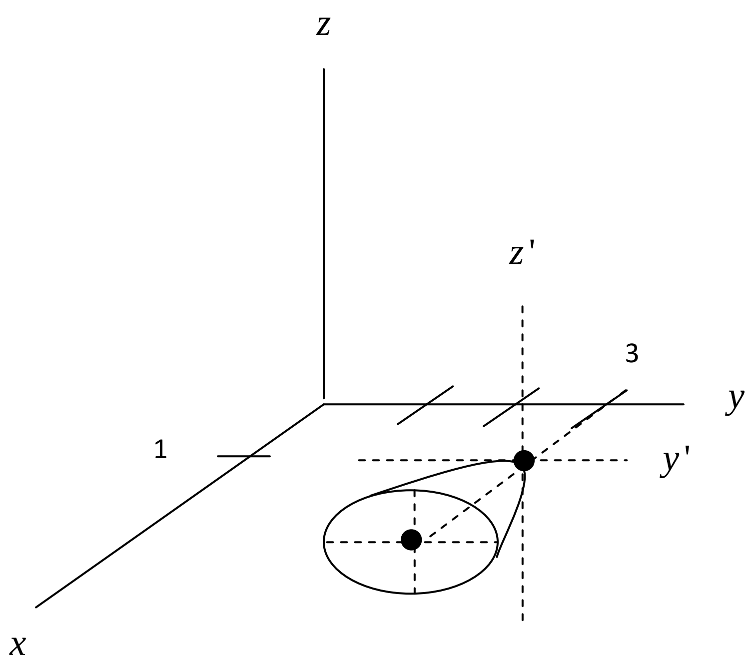
   Primero dejando que $x = z = 0$ obtenemos los interceptos en eje de y, obtenemos los puntos $(0,2,0)$ & $(0,-2,0)$.

   Segundo las trazas para $y = \pm 2(2) = \pm 4$ son las elipses $1 = \frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{6}$.

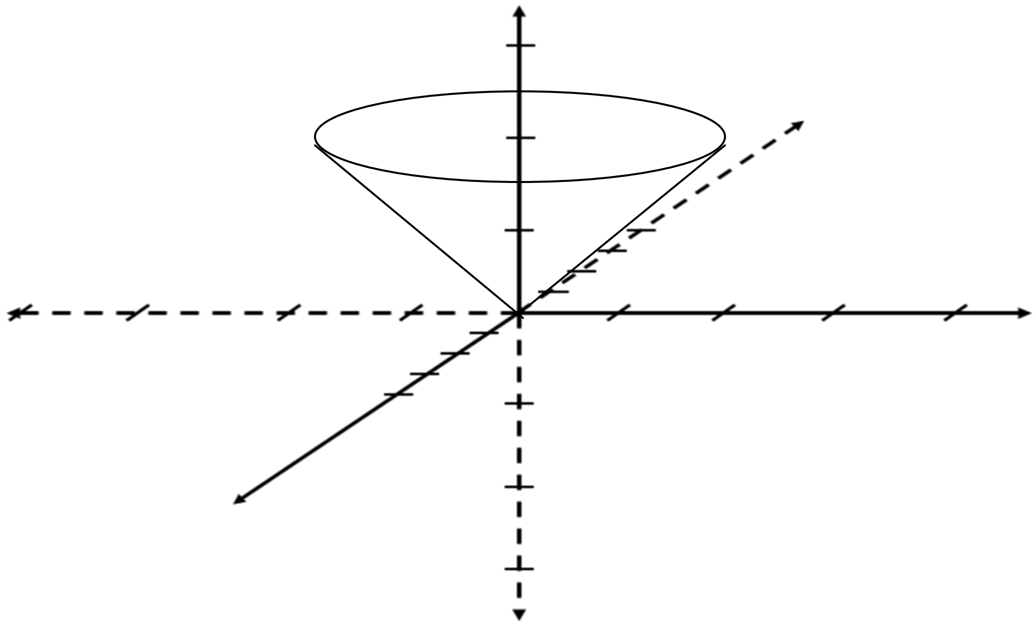
   Finalmente las trazas hiperbólicas las obtenemos cuando dejamos cuando $x = 0$ & $z = 0$ obteniendo $1 = \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2}$ & $1 = -x^2 + \frac{y^2}{4}$ respectivamente.



2) En el caso de la ecuación general $y^2+2z^2-x-6y+10=0$ es necesario completar el cuadrado para el polinomio en la variable y para obtener $(y-3)^2+2z^2-x+1=0$. Podemos reescribir la ecuación como $(y-3)^2+\frac{z^2}{\frac{1}{2}}=x-1$ por lo que tenemos un paraboloide elíptico orientado en la dirección de x con vértice (1, 3, 0). Para trazar la gráfica, utilizaremos un sistema auxiliar tridimensional donde su origen es el punto (1, 3, 0) de manera que $x'=x-1,\ y'=y-3,\ z'=z$. Con estas sustituciones cambiamos nuestra ecuación a $(y')^2+\frac{(z')^2}{\frac{1}{2}}=x'$ la cual trazamos en el sistema auxiliar tridimensional.

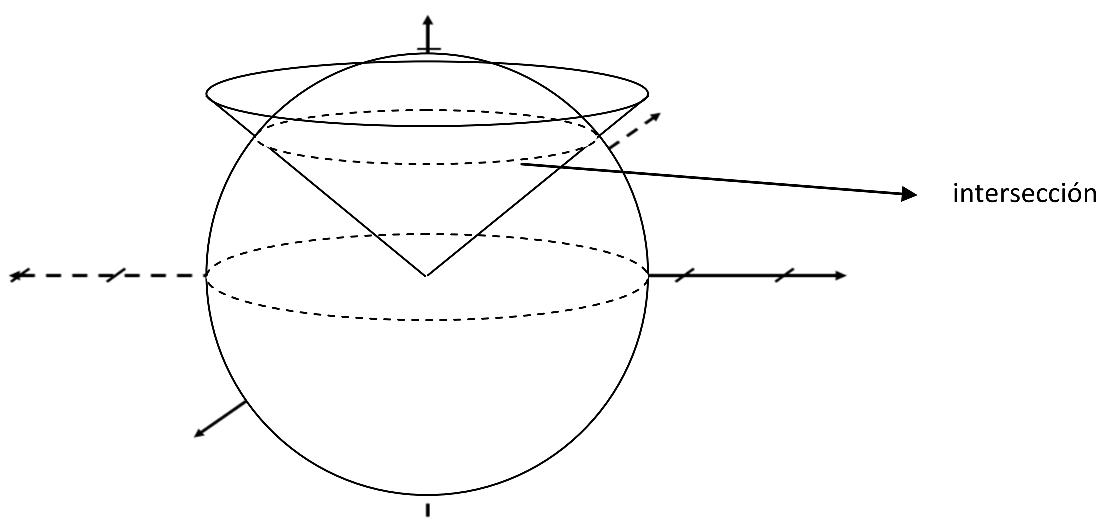


3) Consideremos la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$. En este caso tenemos un cono con una restricción sobre la variable z. Entonces solamente tendremos la mitad del cono circular orientado en la dirección de z.



Intersección de superficies

En muchas ocasiones dos superficies se intersecan, como por ejemplo, el cono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ & la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ como podemos ver en la siguiente gráfica



Visiblemente notamos una intersección con forma elíptica o quizás circular entre las superficies. Para determinar la intersección necesitamos resolver el sistema de ecuaciones

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

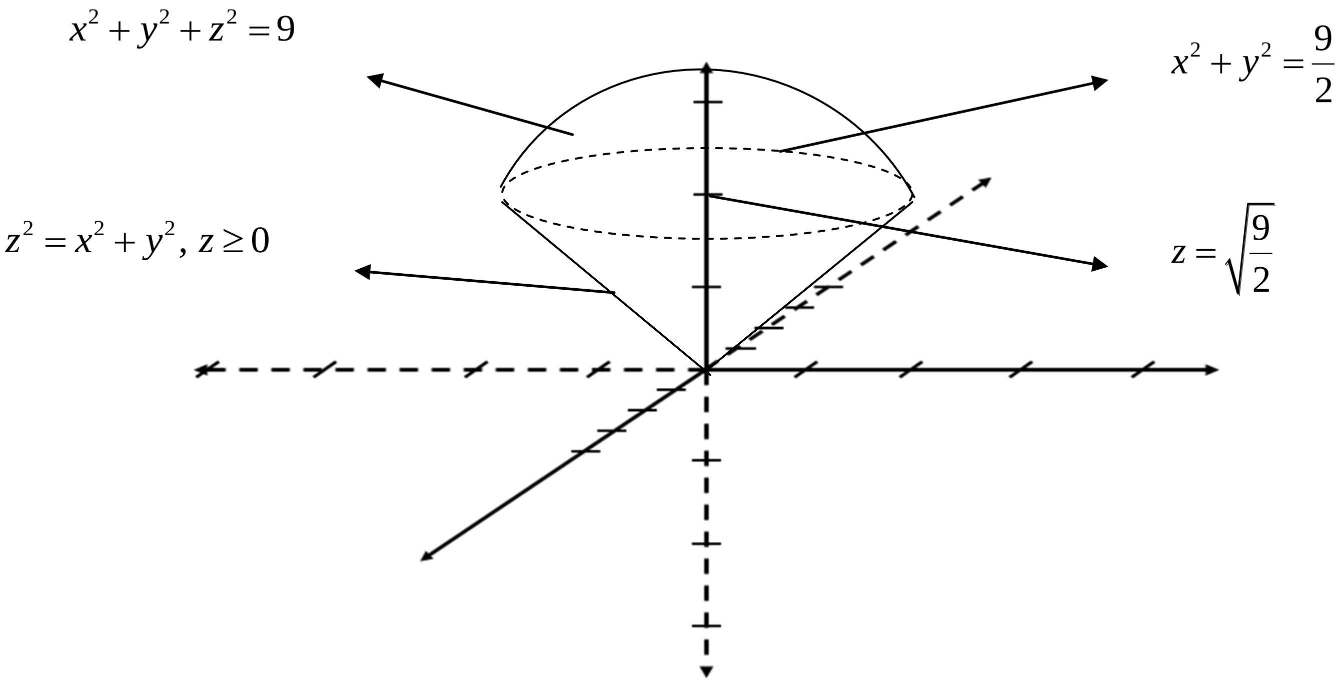
donde $z \geq 0$.

Para resolver el sistema podemos despejar por cualquiera de las tres variables en alguna de las dos ecuaciones para luego sustituir en la otra.

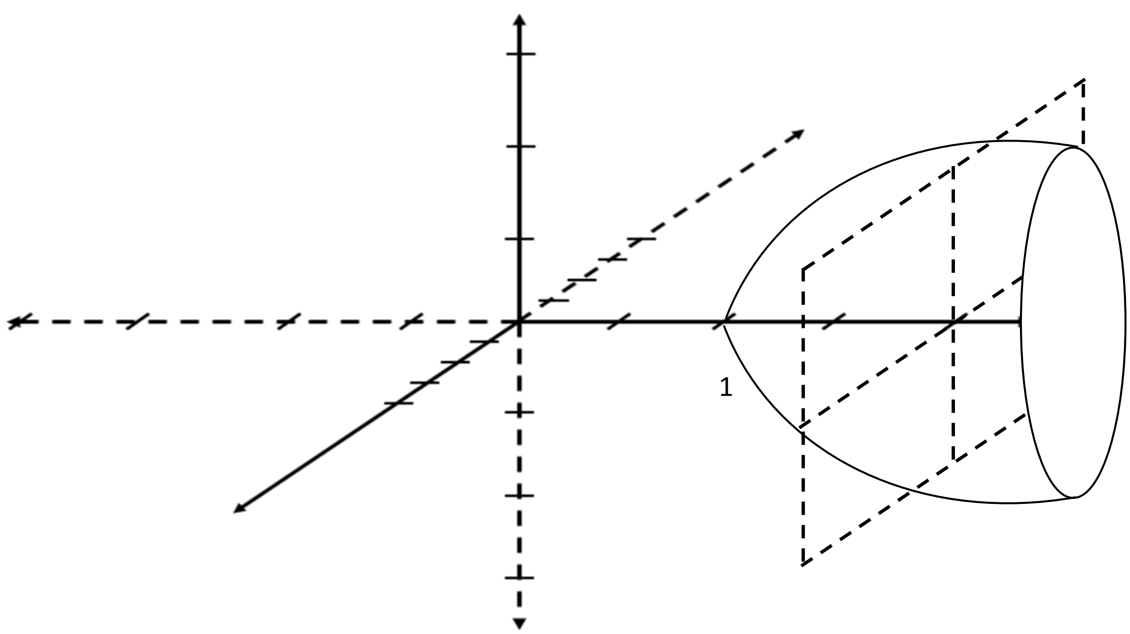
Sustituyendo por z^2 en la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ obtenemos $x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) = 9$ lo cual nos lleva a la círculo $2x^2 + 2y^2 = 9$ ó $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$. Notemos que este círculo es la traza de la esfera cuando $z = \sqrt{\frac{9}{2}}$ y además la intersección ocurre en un plano paralelo al plano coordenado xy.

Si hubiésemos optado por despejar por las otras variables para luego sustituir, la solución obtenida sería la misma. En general pudiéramos obtener distintas intersecciones en planos paralelos a los tres planos coordenados, ene este caso no fue así.

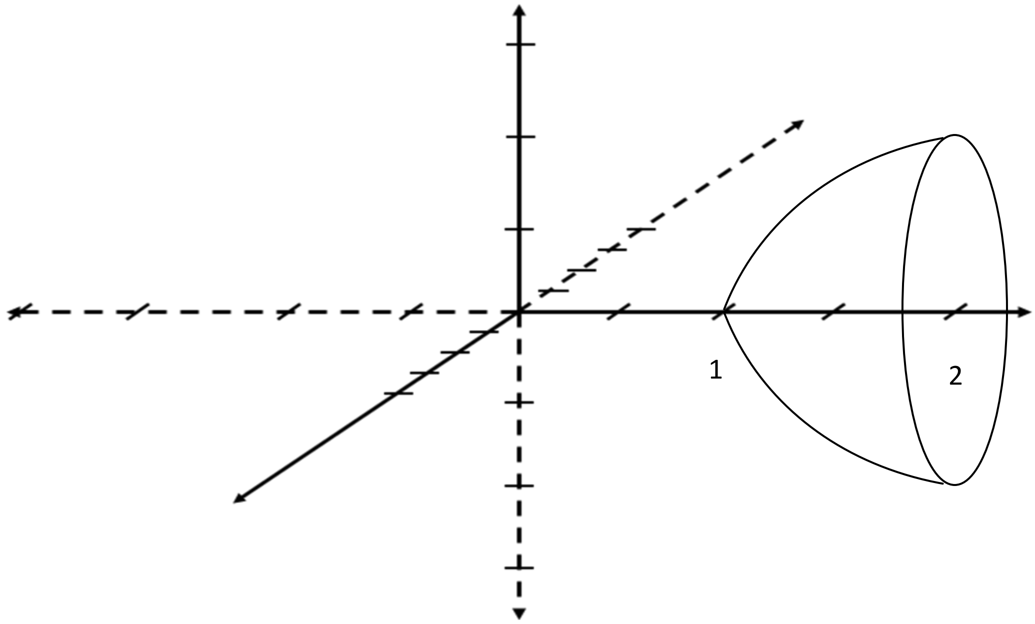
Por otro lado, notemos que podemos generar con las dos superficies una nueva superficie que encierra o acota una región con un volumen por que podemos hablar de generar un sólido acotado por las superficies. Vea la gráfica siguiente:



Como otro ejemplo para dibujar el sólido acotado por el paraboloide $y-1=x^2+z^2$ & el plano $y=2$ primero dibujamos ambas superficies en un mismo sistema



Por lo que obtenemos


1
2