

Nombre **Clave**

de est.

Sección

Profesor

NO se permite el uso de ningún tipo de calculadora. Apague su teléfono celular mientras está tomando el examen.

I. Conteste Cierto (C) ó Falso (F) para cada uno de los siguientes enunciados.
(13pts., 1pt. c/u)

 C 1) La gráfica de $f(x) = \log_2(x)$ es estrictamente creciente.

 C 2) $\log_2 1 = 0$

 F 3) La gráfica de $g(x) = 10^x - 3$ tiene como campo de valores a \mathbb{R} .

 C 4) $\ln(e^{x-5}) = x - 5$

 C 5) Si $P(t) = 200e^{0.054t}$ modela la cantidad de bacterias presentes (medidas en gramos) luego de t días, entonces la cantidad inicial de bacterias en el cultivo era de 200gramos.

 F 6) Un ángulo generado por $\frac{2}{3}$ de una revolución (una vuelta) tiene medida 270° .

 F 7) Si $\tan \theta = \frac{1}{3}$, entonces $\sin \theta = 1$.

 C 8) $\cos 38^\circ = \sin 52^\circ$

 C 9) $\sin^2\left(\frac{\pi}{12} \text{ rad}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12} \text{ rad}\right)$

 C 10) La ecuación $3^{x-2} = 3^x$ no tiene solución.

 C 11) $\log_7(10) = \frac{1}{\log 7}$

 C 12) La función $h(x) = \log_3(x - 4) + 3$ es una función inyectiva (1-1).

 F 13) $\log_5(-25) = -2$.

II. Seleccione la alternativa correcta. Para recibir crédito por su respuesta deberá mostrar procedimiento conducente a su selección.

1) El dominio de $h(x) = -2 + \log(5x + 15)$ es: (3pts.)

a) $(-\infty, \infty)$

b) $(-3, \infty)$

c) $(-2, \infty)$

d) $(3, \infty)$

e) $(0, \infty)$

Requerimos que $5x + 15 > 0 \Rightarrow 5x > -15$

$\Rightarrow x > -3$. Por lo tanto el dominio será

$$x \in \mathbb{R} : x > -3 = -3, \infty$$

2) El campo de valores de $g(x) = -4 + 5^{x+2}$ es: (3pts.)

a) $(-\infty, \infty)$

b) $(-\infty, 0)$

c) $(0, \infty)$

d) $(-4, \infty)$

e) $(-2, \infty)$

La gráfica de $f(x) = 5^x$ tiene como campo

de valores a $(0, \infty)$ y $g(x) = -4 + 5^{x+2}$ es

una traslación vertical por 4 unidades negativas

de $y = 5^x$, por lo que su campo de valores

comenzará a partir de $y = -4$.

3) El intercepto en el eje de y de la gráfica de $f(x) = 5 - \log_2(x + 8)$ es: (3pts.)

a) $(0, -8)$

b) $(0, 0)$

c) $(0, 2)$

d) $(0, 24)$

e) No tiene intercepto en el eje de y

El intercepto en el eje de y se determina dejando que

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 5 - \log_2(0 + 8)$$

$$\Rightarrow f(0) = 5 - \log_2(8) \Rightarrow f(0) = 5 - 3 = 2$$

4) El intercepto en el eje de x de la gráfica de $g(x) = 1 - \log_2(x - 4)$ es (4pts.)

a) $(1, 0)$

b) $(2, 0)$

c) $(4, 0)$

d) $(6, 0)$

e) No tiene intercepto en el eje de x

El intercepto en el eje de x se determina dejando que

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 1 - \log_2(x - 4)$$

$$\Rightarrow \log_2(x - 4) = 1 \Rightarrow x - 4 = 2^1 \Rightarrow x = 6$$

5) $\log(1000) - 4\log_5\left(\frac{1}{25}\right) - 6\ln(\sqrt{e}) =$ (4pts.)

a) -8

b) -2

c) 7

d) 8

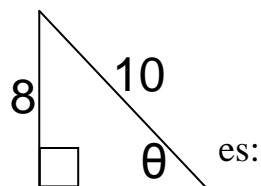
e) 14

$$\log(1000) - 4\log_5\left(\frac{1}{25}\right) - 6\ln \sqrt{e} =$$

$$\log(10^3) - 4\log_5 5^{-2} - 6\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$3 - 4(-2) - 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 8 - 3 = 8$$

6) El valor de $\sec \theta$ en el triángulo



(4pts.)

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{4}$

$$\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}(h)}{\text{lado adyacente a } \theta(b)}$$

$$b = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sec \theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

7) Si θ es un ángulo agudo y $\cos \theta = \frac{2}{3}$, entonces $\csc^2(\theta) =$ (4pts.)

a) $\frac{9}{5}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

e) $\frac{4}{9}$

$$\text{Como } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{Pero } \csc^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{9}{5}$$

8) La medida de 18.41° expresada en grados, minutos y segundos es : (3pts.)

a) $18^\circ 40' 10''$

Convertimos la parte decimal 0.41°

$$1^\circ = 60' \Rightarrow 0.41^\circ = (0.41)60' = 24.60'$$

b) $18^\circ 24' 36''$

Ahora convertimos la parte decimal $0.60'$

$$1' = 60'' \Rightarrow 0.60' = (0.60)60'' = 36''$$

c) $18^\circ 25' 36''$

Entonces

$$18.41^\circ = 18^\circ 24' 36''$$

d) $18^\circ 24' 30''$

e) Ninguna de las anteriores

9) La medida de 105 grados convertida a radianes es: (3pts.)

a) $\frac{7\pi}{12}$

$$1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right) rad \Rightarrow (105)1^\circ = 105 \left(\frac{\pi}{180}\right) rad$$

b) $\frac{11\pi}{12}$

$$\Rightarrow 105^\circ = \left(\frac{105\pi}{180}\right) rad = \left(\frac{7\pi}{12}\right) rad$$

c) $\frac{7\pi}{15}$

d) $\frac{11\pi}{15}$

e) Ninguna de las anteriores

10) Si el largo del arco en un círculo asociado a un ángulo central de $\frac{5\pi}{3}$ radianes es 30π cm entonces el radio del círculo es: (4pts.)

a) $50\pi^2$ cm

El largo de arco se calcula con la fórmula $S = r\theta$.

b) 50 cm

En este caso $S = 30\pi$ cm, $\theta = \frac{5\pi}{3}$, por lo tanto

c) 22 cm

$$30\pi \text{ cm} = r \left(\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow 3(30\pi \text{ cm}) = 5\pi r$$

d) 22π cm

$$\Rightarrow \frac{90\pi \text{ cm}}{5\pi} = r$$

e) Ninguna de las anteriores

$$\Rightarrow 18 \text{ cm} = r$$

Trabaje los siguientes ejercicios. Todo proceso necesario deberá aparecer para recibir crédito por su respuesta.

III. Escriba como suma y resta de logaritmos la expresión $\log\left(\frac{(x-4)(x+1)}{\sqrt{2x-3}}\right)$. Expresar las potencias como factores. (5pts)

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{(x-4)(x+1)}{\sqrt{2x-3}}\right) &= \log(x-4)(x+1) - \log\sqrt{2x-3} \\ &= \log[x-4 \quad x+1] - \log(2x-3)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log(x-4) + \log x+1 - \frac{1}{2}\log(2x-3)\end{aligned}$$

IV. Resuelva las siguientes ecuaciones: (6pts. c/u)

1) $4^{2x-3} = 8^{3x}$ (no use logaritmos para resolver esta ecuación)

$$4^{2x-3} = 8^{3x}$$

$$(2^2)^{2x-3} = (2^3)^{3x}$$

$$2^{4x-6} = 2^{9x}$$

$$4x - 6 = 9x$$

$$-6 = 5x$$

$$\frac{-6}{5} = x$$

$$2) \quad 7^{t-2} = 2^{3t}$$

$$7^{t-2} = 2^{3t}$$

$$\ln(7^{t-2}) = \ln(2^{3t})$$

$$(t-2)\ln(7) = 3t\ln(2)$$

$$t\ln(7) - 2\ln(7) = 3t\ln(2)$$

$$-2\ln(7) = 3t\ln(2) - t\ln(7)$$

$$-2\ln(7) = t[3\ln(2) - \ln(7)]$$

$$\frac{-2\ln(7)}{3\ln(2) - \ln(7)} = t$$

$$\frac{-2\ln(7)}{\ln(8) - \ln(7)} = t$$

$$3) \quad \log(x+2) + \log(x-1) = 1$$

Primero , veamos que las soluciones deberán cumplir con los dominios de las funciones logarítmicas en la ecuación.

Por lo tanto $x > -2$ & $x > 1 \Rightarrow x > 1$.

$$\log(x+2) + \log(x-1) = 1 \Rightarrow$$

$$\log[(x+2)(x-1)] = 1 \Rightarrow$$

$$(x+2)(x-1) = 10^1 \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 10 \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$(x+4)(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$x+4 = 0 \text{ ó } x-3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = -4 \text{ ó } x = 3$$

Sólo $x = 3$ es solución.

$$4) \quad \ln(-2x + 3) - \ln(x) = 1$$

Primero, veamos que las soluciones deberán cumplir con los dominios de las funciones logarítmicas en la ecuación.

$$\text{Por lo tanto } x < \frac{3}{2} \ \& \ x > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{3}{2}.$$

$$\ln(-2x + 3) - \ln(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{-2x + 3}{x}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{-2x + 3}{x} = e^1 \Rightarrow -2x + 3 = ex \Rightarrow$$

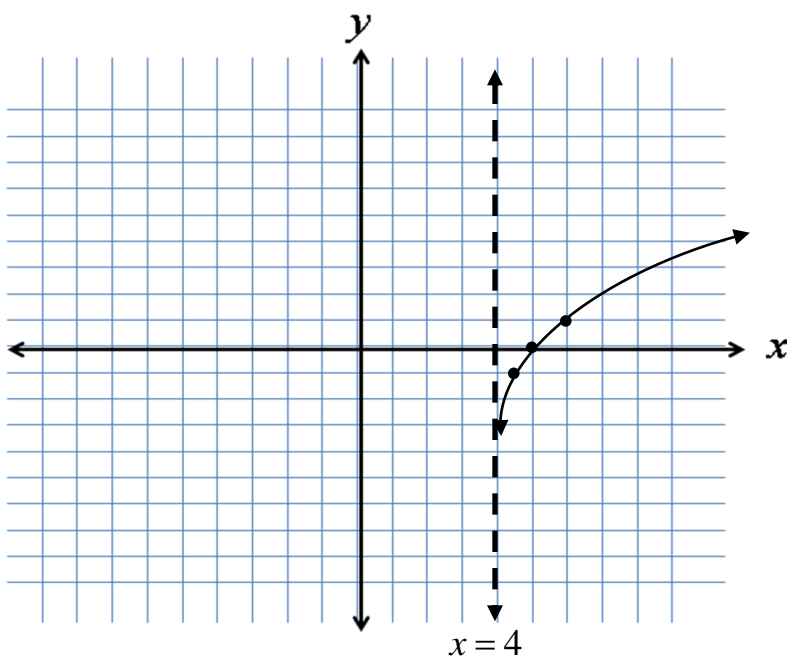
$$3 = ex + 2x \Rightarrow 3 = x(e + 2) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{e + 2} = x \approx \frac{3}{2.71 + 2} = \frac{3}{4.71} \Rightarrow 0 < \frac{3}{4.71} < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

satisface los dominios de la funciones logarimicas en la ecuación .

V. Trace la gráfica de $h(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x - 4)$. Dibuje la asíntota y escriba su ecuación. (6pts.)

x	$\log_{\frac{1}{2}}(x)$	x	$\log_{\frac{1}{2}}(x - 4)$	x	$-\log_{\frac{1}{2}}(x - 4)$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	-1	$2 + 4 = 6$	-1	6	1
$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	0	$1 + 4 = 5$	0	5	0
$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{2}$	1	$4\frac{1}{2}$	-1

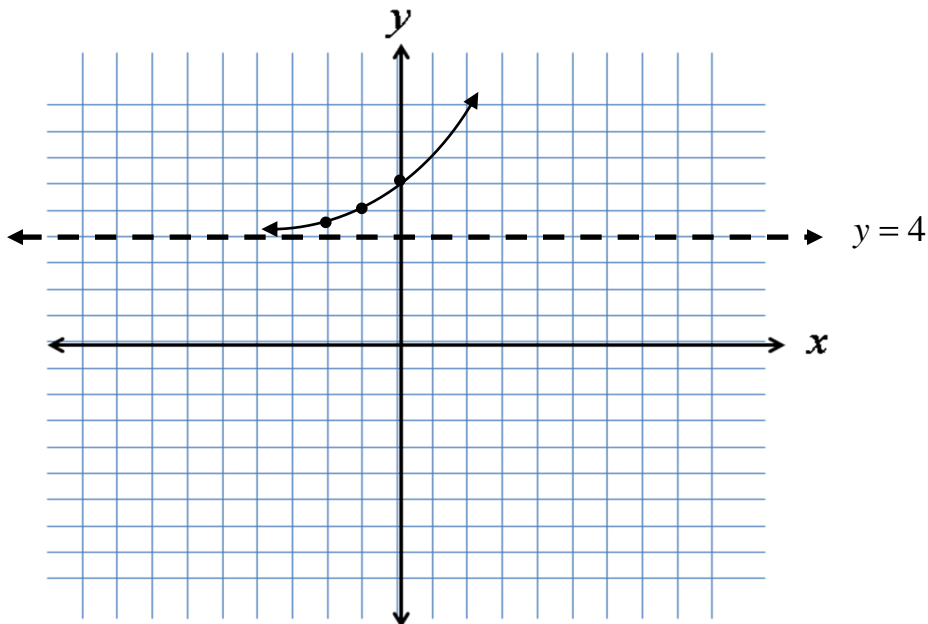


VI. Sea $g(x) = 4 + 2^{x+1}$.

1) Trace la gráfica.

(5pts)

x	2^x	x	2^{x+1}	x	$4 + 2^{x+1}$
-1	$\frac{1}{2}$	$-1-1=-2$	$\frac{1}{2}$	$-1-1=-2$	$\frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{2}$
0	1	$0-1=-1$	1	$0-1=-1$	$1 + 4 = 5$
1	2	$1-1=0$	2	$1-1=0$	$2 + 4 = 6$



2) Identifique la asíntota en el plano cartesiano y escriba su ecuación . (2pts.)

3) Determine $g^{-1}(x)$. (4pts.)

$$y = 4 + 2^{x+1} \Rightarrow y - 4 = 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow \log_2(y - 4) = x + 1 \Rightarrow x = -1 + \log_2(y - 4)$$

Por lo tanto

$$g^{-1}(x) = -1 + \log_2(x - 4)$$

VII. La población de cierta raza de conejos introducida a una isla deshabitada crece de acuerdo a la función exponencial $P(t) = 150(3^{0.02t})$ donde el tiempo t transcurrido se mide en días.

1) ¿Cuántos conejos hay presentes luego de 100 días ?

(2pts.)

$$P(100) = 150(3^{0.02(100)}) = 150(3^2) = 150(9) = 1,350 \text{ conejos}$$

2) ¿Cuántos días tarda la población original en triplicarse ? (4pts)

$$450 = 150(3^{0.02t}) \Rightarrow \frac{450}{150} = 3^{0.02t} \Rightarrow$$

$$3 = 3^{0.02t} \Rightarrow 1 = 0.02t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{0.02} = t \Rightarrow \frac{1}{2 \times 10^{-2}} = \frac{10^2}{2} = 50 \text{ días}$$