Universidad de Puerto Rico en Bayamón
Departamento de Matemáticas
Mate3172 - Examen 3
14 de mayo de 2012

Nombre________CLAVE___________ # de est. ______________________
Sección ________ Profesor______________________

Parte I. Instrucciones: En esta primera parte **no utilice la calculadora** para resolver los ejercicios. Escriba las respuestas en valores exactos. No se aceptarán respuestas dadas en números decimales. De lo contrario, no recibirá crédito por su respuesta.

1. Resuelva las siguientes ecuaciones, exprese sus respuestas en radianes.

   a. $-1+2\text{sen}3\theta = 0$ (solución general) (6pts.)

Despejando por $\text{sen}(3\theta)$ tenemos que $\text{sen}(3\theta)=\frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$3\theta = \frac{\pi}{6} \pm n(2\pi) \quad ó \quad 3\theta = \frac{5\pi}{6} \pm n(2\pi) \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{\pi}{18} \pm n\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad ó \quad \theta = \frac{5\pi}{18} \pm n\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

   b. $\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta = 0, \quad 0 \le \theta < 2\pi$ (6pts.)

Primero sustituimos $\cos^2(\theta) = 1-\text{sen}^2(\theta)$ en la ecuación de manera que tengamos una sola función trigonométrica por lo que obtenemos

$$1-\text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta = 0 \Rightarrow 0 = 2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\theta - 1$$

Esta es una ecuación tipo cuadrática.

$$0 = 2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\theta - 1 \Rightarrow$$

$$(2\text{sen}\theta + 1)(\text{sen}\theta - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$2\text{sen}\theta + 1 = 0 \;\; ó \;\; \text{sen}\theta - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{sen}\theta = \frac{-1}{2} \quad ó \quad \text{sen}\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \;\; ó \;\; \theta = \frac{\pi}{2}$$

c. $\tan x = 2\operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi$ (6pts.)

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = 2\operatorname{sen}(x) \Rightarrow \cos(x) \ne 0 \Rightarrow x \ne \pm(2n+1)\frac{\pi}{2} n = 0,1,2...$$

$$\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(x)[1 - 2\cos(x)] = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \quad \acute{o} \quad 1 - 2\cos(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \quad \acute{o} \quad \cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x = 0, \pi \quad \acute{o} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

2. Demuestre las siguientes identidades.

a. $2\tan x \sec x = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$ (6pts.)

$$2\tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

$$2\tan x \sec x = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x)\ 1 + \operatorname{sen} x} - \frac{1 - \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}$$

$$2\tan x \sec x = \frac{2\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$2\tan x \sec x = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \bullet \frac{1}{\cos x} = 2\tan x \sec x$$

b. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}=1-\cot\alpha\tan\beta$ (6pts.)

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}=1-\cot(\alpha)\tan(\beta)\Rightarrow$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}-\frac{\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}=1-\cot(\alpha)\tan(\beta)\Rightarrow$$

$$1-\frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}\bullet\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}=1-\cot(\alpha)\tan(\beta)$$

$$1-\cot(\alpha)\tan(\beta)=1-\cot(\alpha)\tan(\beta)$$

3. Determine el valor exacto en cada uno de los siguientes ejercicios.

a. $2\cos^2 15^\circ-1$ (3pts.)

$$2\cos^2 15^\circ-1=\cos[2\bullet 15^\circ]=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{2}+\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$ (6pts.)

$$\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}+\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)+\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}\bullet\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{10}=$$

Deje que $\theta=\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$, entonces $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3}{5}\right)=\cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}(\theta)=\dfrac{3}{5}$ donde $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2(\theta)=1\Rightarrow$$

$$\cos^2(\theta)=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow$$ Como $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$, entonces $\cos(\theta)=\dfrac{4}{5}$

$$\cos(\theta)=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$$

Finalmente

$$\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}+\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\bullet\frac{4}{5}+\frac{3}{10}=\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$$

4. Si $\tan\alpha = \frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\beta = \frac{-1}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, determine el valor exacto de:

Como $\operatorname{sen}\beta = \frac{-1}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, entonces $\beta = \frac{11\pi}{6}$. Además como $\tan\alpha = \frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, entonces para el ángulo en posición estándar α, un punto en su lado terminal es $(-3,-1)$ por lo que $r = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$. Entonces $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ y $\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$.

a. (6pts.)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\\ &= \frac{-3\sqrt{10}}{10}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{10}}{10}\bullet\frac{-1}{2}\\ &= \frac{-3\sqrt{30}}{20} - \frac{\sqrt{10}}{20}\\ &= \frac{-3\sqrt{30}-\sqrt{10}}{20}\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}\\ &= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\\ &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\bullet\frac{9}{8} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

(4pts)

c.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{-3\sqrt{10}}{10}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{\frac{10+3\sqrt{10}}{10}}{2}} = \sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{20}}\end{aligned}$$

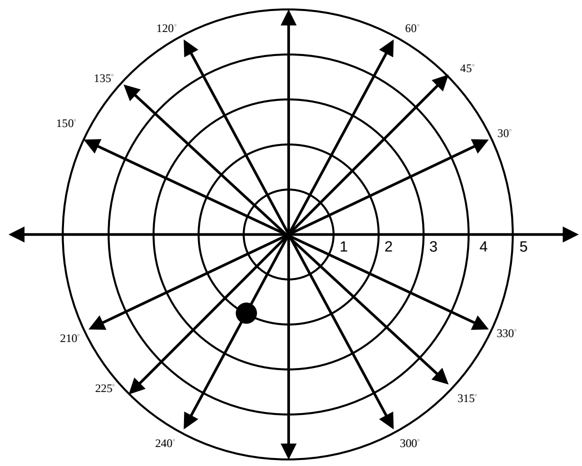
(4pts.)

5. Determine las coordenadas polares del punto $-1,-\sqrt{3}$. Trace el punto en el plano polar provisto. (5pts.)

Para el punto $-1,-\sqrt{3}$ tenemos que

$r=\sqrt{(-1)^2+\ -\sqrt{3}\ ^2}=\sqrt{4}=2$. Además

$\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=240^\circ$. Por lo tanto el punto en coordenadas polares está dado por $(2,240^\circ)$



6. Escriba en forma polar el número complejo $-1-i$ (4pts.)

$r=\sqrt{(-1)^2+\ -1^2}=\sqrt{2}$ y $\tan\theta=\dfrac{-1}{-1}=1\Rightarrow\theta=225^\circ$

$-1-i=\sqrt{2}(\cos 225^\circ+i\,\mathrm{sen}225^\circ)$

7. Para los números complejos $z=2(\cos 20^\circ+i\,\mathrm{sen}20^\circ), w=\sqrt{6}(\cos 40^\circ+i\,\mathrm{sen}40^\circ)$ determine (exprese su respuesta en forma rectangular) (6pts.)

$$\frac{w^2}{z}=\frac{6(\cos 80^\circ+i\,\mathrm{sen}80^\circ)}{2(\cos 20^\circ+i\,\mathrm{sen}20^\circ)}=3(\cos 60^\circ+i\,\mathrm{sen}60^\circ)=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

8. Para $w=81(\cos 240^\circ+i\,\mathrm{sen}240^\circ)$ determine las dos raíces cuadradas de w. Exprese las respuestas en forma polar. (5pts.)

$$z_k=\sqrt{81}\left(\cos\left(\frac{240^\circ}{2}+\frac{k360^\circ}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{240^\circ}{2}+\frac{k360^\circ}{2}\right)\right)=9\ \cos\ 120^\circ+k180^\circ\ +i\,\mathrm{sen}\ 120^\circ+k180^\circ$$

$k=0,1$

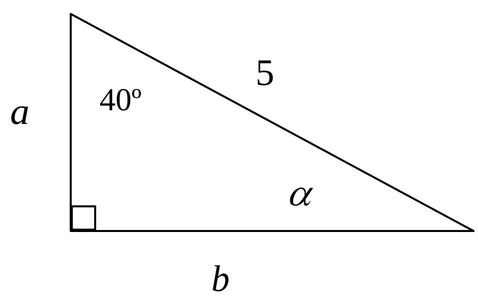
$z_0=9\ \cos\ 120^\circ\ +i\,\mathrm{sen}\ 120^\circ$

$z_1=9\ \cos\ 300^\circ\ +i\,\mathrm{sen}\ 300^\circ$

Nombre__________________________ **# de estudiante**_____________________

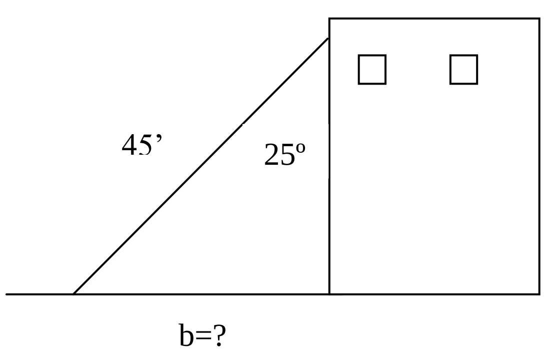
Parte II. Instrucciones. En esta parte puede utilizar la calculadora científica (**no se permite el uso de calculadora gráfica**) para resolver los ejercicios. Redondee su respuesta a cada ejercicio a dos lugares decimales.

1. Para el triángulo rectángulo siguiente determine las partes restantes. (6pts.)



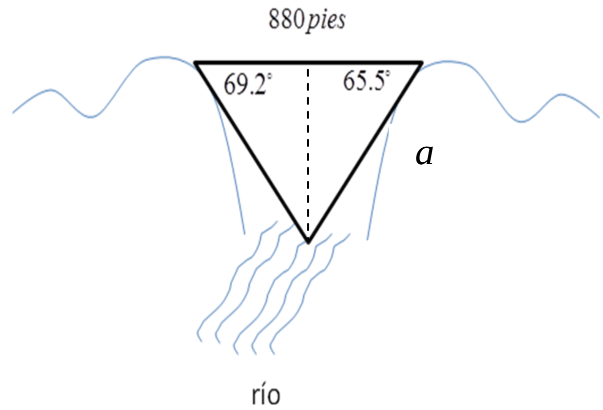
Entonces $\alpha = 50^\circ$. Además $\cos(40^\circ) = \frac{a}{5} \Rightarrow 5\cos(40^\circ) = a \Rightarrow 3.83 = a$. Para el lado b podemos utilizar el Teorema de Pitágoras o una función trigonométrica. Notemos que $\cos(50^\circ) = \frac{b}{5} \Rightarrow 5\cos(50^\circ) = b \Rightarrow 3.21 = b$.

2. Una escalera de 45pies de largo esta recostada de un edificio vertical de manera que el ángulo que forma con el punto de contacto en el edificio es de 25°. Determine cuán lejos está la el punto de contacto de la escalera en el suelo de la base del edificio. (4pts.)



Vea que $\text{sen}(25^\circ) = \frac{b}{45} \Rightarrow 45\text{sen}(25^\circ) = b \Rightarrow 19.02\,pies$

3. Un puente de 880 pies de largo ha sido construido entre dos montañas y sobre un río según el dibujo siguiente. ¿A qué altura está el puente con respecto al río? (6pts.)

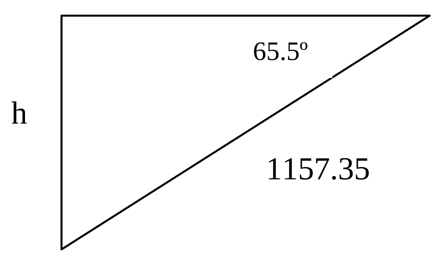


El ángulo opuesto a 880 está dado por $180^\circ - (69.2^\circ - 65.5^\circ) = 45.3^\circ$. Primero determinamos el lado a opuesto al ángulo 69.2°. Para ello utilizamos la ley de senos.

$$\frac{a}{sen(69.2^\circ)} = \frac{880}{sen 45.3^\circ} \Rightarrow$$

$$a = \frac{880 sen(69.2^\circ)}{sen 45.3^\circ} = 1157.35$$

Ahora miramos al triángulo



Notemos que

$$sen(65.5^\circ) = \frac{\text{h}}{1157.35} \Rightarrow 1157.35 sen(65.5^\circ) = \text{h}$$

$$\Rightarrow 1053.14\, pies = \text{h}$$

4. Un triángulo tiene como partes conocidas $a = 2, b = 3, \beta = 40^\circ$. Determine si se forman uno, dos o ningún triángulo. En caso de que se forme uno o dos triángulo(s) no resuelva tal(es) triángulo(s) (5pts.)

Como tenemos dos partes opuestas utilizamos la ley de senos para determinar al ángulo opuesto al lado a, esto es, el ángulo α. Establecemos

$$\frac{sen 40^\circ}{3} = \frac{sen \alpha}{2} \Rightarrow sen \alpha = \frac{2 sen 40^\circ}{3} = 0.428525 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 25.37^\circ \qquad \alpha_2 = 180^\circ - 25.37^\circ = 154.62^\circ$$

El ángulo $\alpha_2 = 154.62^\circ$ sumado a $\beta = 40^\circ$ sobrepasa los 180º por lo que descarta a $\alpha_2 = 154.62^\circ$.Por lo tanto se forma sólo un triángulo.

5. Para el triángulo con $b = 4, c = 1, \alpha = 120^\circ$ determine

   a. el lado que falta (4pts.)

Dado que tenemos dos lados y el ángulo incluido utilizamos la ley de cosenos para determinar el lado a

$$a^2 = 4^2 + 1^2 - 2(4)(1)\cos 120^\circ = 17 - 8\left(-\frac{1}{2}\right) = 21 \Rightarrow a = \sqrt{21}$$

   b. el área del triángulo (2pts.)

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(4)(1)sen(120^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$