

Nombre _____

de est. _____

Sección _____

Profesor _____

NO se permite el uso de ningún tipo de calculadora. Apague su teléfono celular mientras está tomando el examen.

I. Conteste Cierto (C) ó Falso (F) para cada uno de los siguientes enunciados. (2pts.c/u)

 F 1) La gráfica de $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ es creciente.

 F 2) $\log_2(-2) = -1$.

 F 3) La gráfica de $f(x) = e^x + 2$ tiene como asíntota horizontal al eje de x .

 C 4) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$.

 C 5) $3^{\log_3 5} = 5$.

 C 6) $\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}$

 C 7) Un ángulo generado por $\frac{2}{3}$ de una revolución (una vuelta) tiene medida 240° .

 F 8) Si $\tan \theta = \frac{2}{3}$, entonces $\cos \theta = \frac{3}{13}$.

 C 9) $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 70^\circ} = 1$

 F 10) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$

II. Seleccione la mejor respuesta circulando la alternativa correcta. **Para recibir crédito por su respuesta deberá mostrar procedimiento conducente a su selección** (3pts. c/u)

1) El campo de valores de $f(x) = 2 + 3^{x-4}$ es:

a) $(-\infty, \infty)$

b) $(-\infty, 0)$

c) $(0, \infty)$

d) $(2, \infty)$

e) $(4, \infty)$

La gráfica de $y = 3^x$ tiene como campo de valores a $(0, \infty)$ y $f(x) = 2 + 3^{x-4}$ es una traslación vertical por 2 unidades positivas de $y = 3^x$. por lo que su campo de valores comenzará a partir de $y = 2$.

2) El dominio de $g(x) = 3 - \log_5(3x - 12)$ es:

a) $(-\infty, \infty)$

b) $(-\infty, 0)$

c) $(0, \infty)$

d) $(3, \infty)$

e) $(4, \infty)$

Requerimos que $3x - 12 > 0 \Rightarrow 3x > 12$
 $\Rightarrow x > 4$. Por lo tanto el dominio será
 $x \in \mathbb{R} : x > 4$

3) El intercepto en el eje de y de la gráfica de $f(x) = -1 + \log_3(x + 9)$ es:

a) $(0, 1)$

b) $(-6, 0)$

c) $(0, -1)$

d) $(1, 0)$

e) No tiene intercepto en el eje de y

Dejamos que $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1 + \log_3(0 + 9)$
 $\Rightarrow f(0) = -1 + \log_3(9) \Rightarrow f(0) = -1 + 2 = 1$

4) Si $e^{x-1} = 2$, entonces $x =$

a) $\ln(2)$

b) $1 - \ln(2)$

c) $1 + \ln(2)$

d) $1 + \frac{2}{e}$

e) Ninguna de las anteriores

$e^{x-1} = 2 \Rightarrow \ln(2) = x - 1$
 $\Rightarrow \ln(2) + 1 = x$

5) $4\log_3 \sqrt{3} - \ln(e^8) + \log(0.001) =$

a) -10

b) -9

c) -8

d) -6

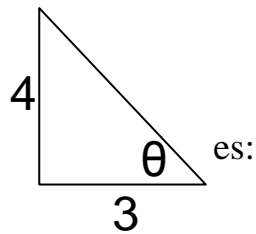
e) -3

$$4\log_3(3^{\frac{1}{2}}) - 8 + \log(10^{-3})$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}\right) - 8 + (-3)$$

$$\Rightarrow 2 - 8 - 3 = -9$$

6) El valor de $\csc\theta$ en el triángulo



a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{4}$

$$\csc \theta = \frac{\text{hipotenusa}(h)}{\text{lado opuesto a } \theta}$$

$$h = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\csc \theta = \frac{5}{4}$$

7) Si θ es un ángulo agudo y $\sin \theta = \frac{1}{5}$, entonces $\sec^2 \theta =$

a) $\frac{24}{25}$

b) $\frac{1}{25}$

c) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

d) $\frac{25\sqrt{6}}{12}$

e) $\frac{25}{24}$

Como $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$

$\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{25}{25} - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

Pero $\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{25}{24}$

8) La medida de 27.12° expresada en grados, minutos y segundos es:

a) $27^\circ 7' 12''$

$$1^\circ = 60' \Rightarrow (0.12)1^\circ = (0.12)60' = 7.2'$$

$$1' = 60'' \Rightarrow (0.2)1' = (0.2)60'' = 12''$$

b) $27^\circ 7' 20''$

$$27.12^\circ = 27^\circ 7' 12''$$

c) $27^\circ 10' 2''$

d) $27^\circ 12'$

e) Ninguna de las anteriores

9) La medida de $\frac{5\pi}{12}$ radianes convertida a grados es:

a) 15°

b) 25°

c) 30°

d) 60°

e) 75°

$$1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \Rightarrow \frac{5\pi}{12}(1\text{rad}) = \frac{5\pi}{12}\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{12}(1\text{rad}) = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$$

10) El largo del arco que tiene un ángulo de $\frac{3\pi}{5}$ radianes en un círculo de radio 25cm es:

a) $\frac{3\pi}{5}$ cm

$$S = r\theta = (25\text{cm})\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 15\pi \text{ cm}$$

b) 15π cm

c) $9\pi^2$ cm

d) 125π cm

e) Ninguna de las anteriores

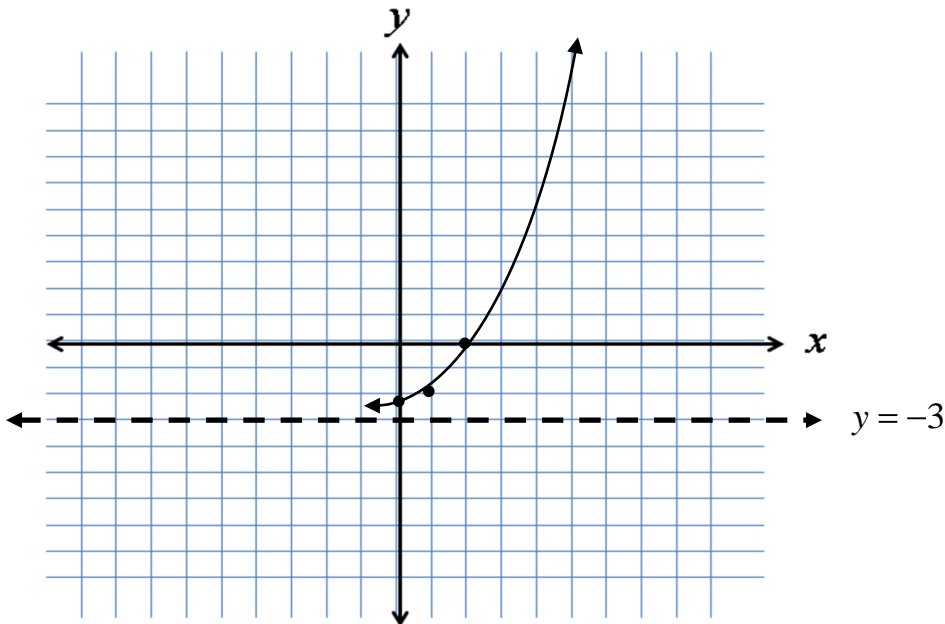
III. Trabaja los siguientes problemas. Muestre su procedimiento. Sea $g(x) = -3 + 3^{x-1}$.

1) Trace la gráfica (5pts)

x	3^x
-1	$3^{-1} = \frac{1}{3}$
0	$3^0 = 1$
1	$3^1 = 3$

x	3^{x-1}
$-1+1=0$	$\frac{1}{3}$
$0+1=1$	1
$1+1=2$	3

x	$-3+3^{x-1}$
0	$\frac{1}{3}-3 = -2\frac{1}{3}$
1	$1-3 = -2$
2	$3-3 = 0$



2) Identifique la asíntota en el plano cartesiano y escriba su ecuación (2pts.)

3) Determine $g^{-1}(x)$ (3pts.)

$$y = -3 + 3^{x-1} \Rightarrow y + 3 = 3^{x-1}$$

$$\Rightarrow x - 1 = \log_3(y + 3) \Rightarrow x = 1 + \log_3(y + 3)$$

Por lo tanto

$$g^{-1}(x) = 1 + \log_3(x + 3)$$

IV. Escriba como suma y resta de logaritmos la expresión $\ln\left(\frac{\sqrt{x+3}}{(x-1)^2}\right)$ y escriba las potencias expresadas como factores (5pts)

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x+3}}{(x-1)^2}\right) = \ln \sqrt{x+3} - \ln(x-1)^2$$

$$= \ln x + 3^{\frac{1}{2}} - 2\ln(x-1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+3) - 2\ln(x-1)$$

V. Resuelva las siguientes ecuaciones: (25pts.)

1) $9^{2x-1} = 27^{3x}$ (no use logaritmos para resolver esta ecuación)

$$9^{2x-1} = 27^{3x}$$

$$(3^2)^{2x-1} = (3^3)^{3x}$$

$$3^{4x-2} = 3^{9x}$$

$$4x - 2 = 9x$$

$$-2 = 5x$$

$$\frac{-2}{5} = x$$

2) $5^{t+1} = 2^t$

$$5^{t+1} = 2^t$$

$$\ln(5^{t+1}) = \ln(2^t)$$

$$(t+1)\ln(5) = t\ln(2)$$

$$t\ln(5) + \ln(5) = t\ln(2)$$

$$\ln(5) = t\ln(2) - t\ln(5)$$

$$\ln(5) = t[\ln(2) - \ln(5)]$$

$$\frac{\ln(5)}{\ln(2) - \ln(5)} = t$$

3) $\ln(x-12) = 2\ln(x)$

$$\ln(x-12) = 2\ln(x) \Rightarrow$$

$$\ln(x-12) = \ln(x^2) \Rightarrow$$

$$x-12 = x^2 \Rightarrow$$

$$0 = x^2 - x + 12 \Rightarrow$$

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(12) = -4$$

no hay soluciones reales

la ecuación no tiene solución

$$4) \quad \log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$$

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1 \Rightarrow$$

$$\log_3[(x+1)(x+3)] = 1 \Rightarrow$$

$$3^1 = (x+1)(x+3) \Rightarrow$$

$$3 = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow$$

$$0 = x^2 + 4x \Rightarrow 0 = x(x+4)$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -4$$

Solamente $x = 0$ es solución

$$5) \quad 3^{2x} + 3^x - 20 = 0$$

$$3^{2x} + 3^x - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$(3^x)^2 + 3^x - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$u = 3^x \Rightarrow u^2 + u - 20 = 0 \Rightarrow$$

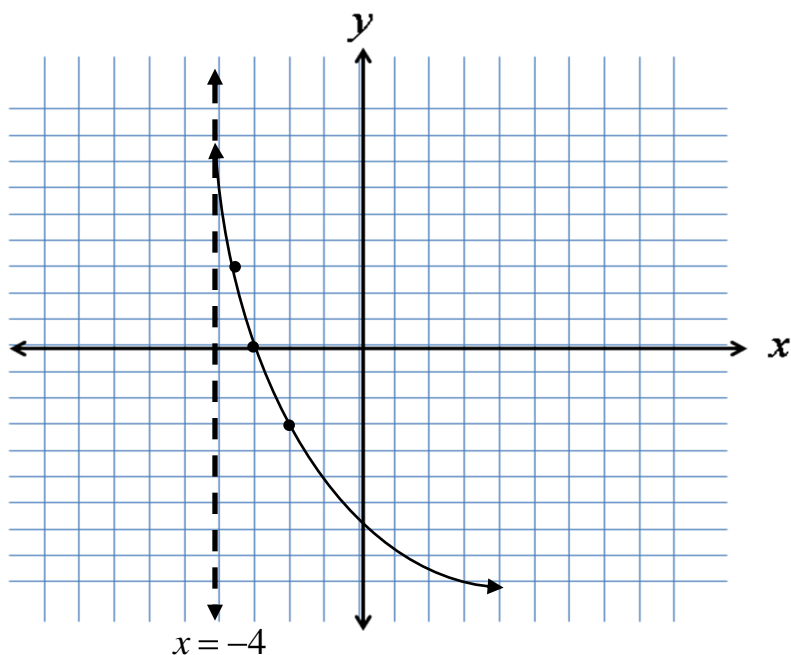
$$(u+5)(u-4) = 0 \Rightarrow u = -5 \quad \text{ó} \quad u = 4 \Rightarrow$$

$$3^x = -5 \quad \text{no tiene solución}$$

$$\text{ó} \quad 3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$$

VI. Trace la gráfica de $h(x) = -3\log_2(x+4)$. Dibuje la asíntota y escriba su ecuación (5pts.)

x	$\log_2(x)$	x	$\log_2(x+4)$	x	$-3\log_2(x+4)$
$2^{-1} = \frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2} - 4 = -3\frac{1}{2}$	-1	$-3\frac{1}{2}$	$-3(-1) = 3$
$2^0 = 1$	0	$1 - 4 = -3$	0	-3	$-3(0) = 0$
$2^1 = 2$	1	$2 - 4 = -2$	1	-2	$-3(1) = -3$



VII. La cantidad presente de una cantidad inicial de 200gramos del material radioactivo **carbono 14** , luego de t años ,está dada por la función $A(t) = 200(2^{-t/5730})$.
 Determine:

- 1) ¿Cuánto material queda luego de 11460 años? (2pts.)

$$\begin{aligned} A(11460) &= 200(2^{-11460/5730}) \\ &= 200(2^{-2}) \\ &= \frac{200}{4} = 50 \text{ gramos} \end{aligned}$$

- 2) ¿Cuántos años tarda la mitad de la cantidad inicial del material en desintegrarse? (3pts)

$$\begin{aligned} 100 &= 200(2^{-t/5730}) \Rightarrow \frac{1}{2} = 2^{-t/5730} \\ \Rightarrow 2^{-1} &= 2^{-t/5730} \Rightarrow -1 = \frac{-t}{5730} \\ \Rightarrow -5730 &= -t \Rightarrow 5730 = t \end{aligned}$$