

Segundo Examen Parcial de Matemática Discreta

Segundo semestre 2011-2012

Versión A

Nombre: _____ Fecha: _____

Sección: _____ Dra. Yolanda Vélez Núm. de Est. _____

I. Mencione si la proposición es Cierta (C) ó Falsa (F).(1pt/cu)

Utilizando la siguiente información para los ejercicios 1- 5.

Sea $A = \{ 1, 2, 3\}$, $B = \{ 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

1. ___F___ $\{1, 2\} \in A$.
2. ___F___ $1, 3, 5$ subconjunto de C .
3. ___C___ \emptyset subconjunto de A .
4. ___C___ $A \cup \emptyset = A$
5. ___C___ $A \cup B \cup C = U$
6. ___F___ $(a, 1) \in$ al producto cartesiano de $A = \{1,2\}$ y $B = \{a, b, c\}$.
7. ___F___ Un requisito necesario para que una función tenga función inversa es que sea una función uno- a - uno.
8. ___F___ El número de subconjuntos de un conjunto A con n elementos es n^2 .
9. ___F___ La función inversa de $f(x) = 5x - 3$ es $g(x) = 3x + 5$.
10. ___C___ $8! = 8 * 7 * 6 * 5!$
11. ___F___ La letra que sustituye a la letra V cuando la función $F(x) = (2x + 5) \bmod 26$ es usada como clave es y .
12. ___F___ María tiene 3 blusas y 4 pantalones para el trabajo, por lo tanto tiene 7 arreglos diferentes de ropa.
13. ___C___ Si $3 \equiv 27 \pmod{4}$ y $3 \equiv 15 \pmod{4}$ entonces $2 \equiv 42 \pmod{4}$.
14. ___F___ $P(8, 2) = \frac{8!}{2!}$

Segundo Examen Parcial de Matemática Discreta

II. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determine: (2 pts./cu)

1. $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cap C = \{1, 3\}$.

2. $(A \cap C) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

3. $(B \cup C)^c = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)^c = \{\}$.

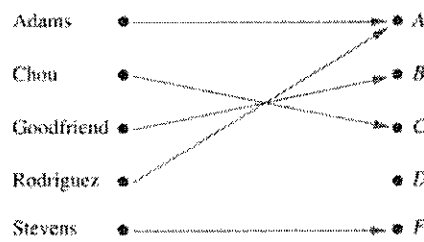
4. $(C - A)^c = \{5, 7, 9\}^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

5. Cuantos subconjuntos tiene B? $2^4 = 16$.

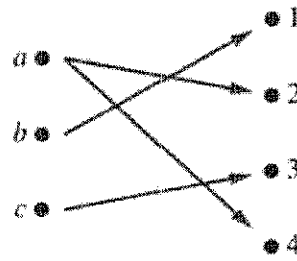
III. Seleccione la mejor contestación:

Conteste las preguntas del 1-3 con los siguientes dibujos.

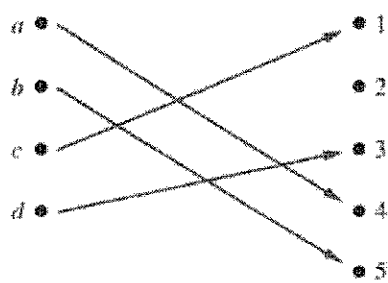
a)



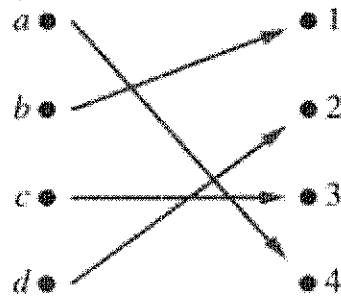
D)



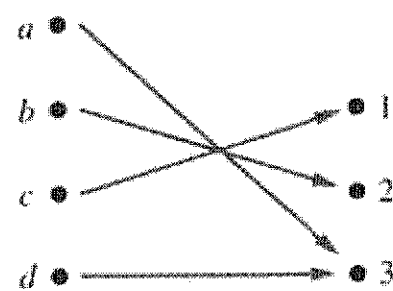
b)



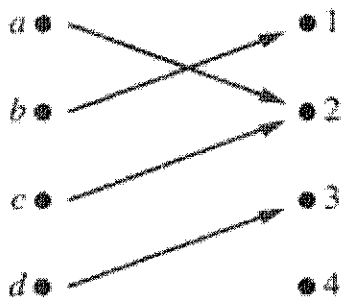
e)



c)



F)



Segundo Examen Parcial de Matemática Discreta

Segundo semestre 2011-2012

Versión A

1. _____ ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones? (Se acepta más de una contestación)

Todas excepto d.

2. _____ ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones es uno a uno? (Se acepta más de una contestación)

B, e

3. _____ ¿Cuáles de las siguientes relaciones funciones son inyectivas "onto"? (Se acepta más de una contestación)

C y e.

4. c Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x} + 5$ entonces $f(g(x))$ es:

a) $x + 4$

b) $\sqrt{x^2 - 1} + 5$

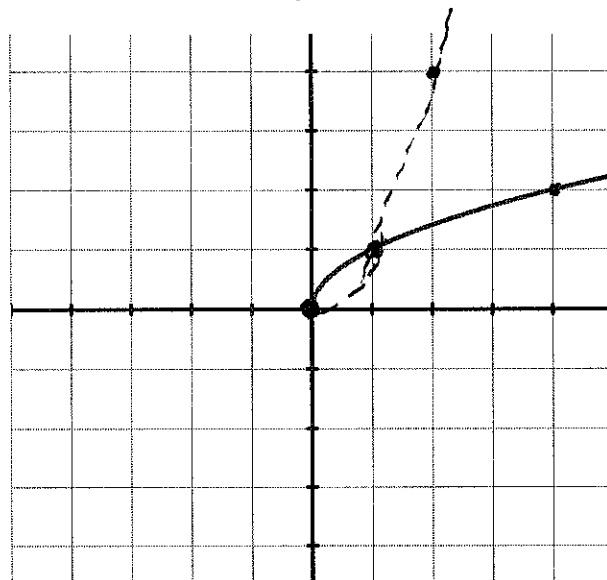
c) $x + 10\sqrt{x} + 24$

d) $x^2 + 24$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x} + 5) = (\sqrt{x} + 5)^2 - 1 = x + 10\sqrt{x} + 25 - 1 = x + 10\sqrt{x} + 24$$

IV. Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios:

1. Dibuje la función inversa de la función cuya gráfica aparece a continuación: (5 pts.)



Segundo Examen Parcial de Matemática Discreta

Segundo semestre 2011-2012

Versión A

2. Determine la función inversa de $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$ (6 pts.)

$$y = \frac{x+2}{1-x}$$

$$y - xy = x + 2$$

$$-x - xy = 2 - y$$

$$-x(1+y) = 2 - y$$

$$-x = \frac{2-y}{1+y}$$

$$x = \frac{y-2}{1+y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{1+x}$$

3. Demuestre utilizando prueba directa que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. (5 pts.)

Prueba:

Sea $x \in \overline{A \cap B}$. Por definición de complemento $x \notin A \cap B$.

x puede estar en A ó en B "o en U , pero no en ambos a la vez.

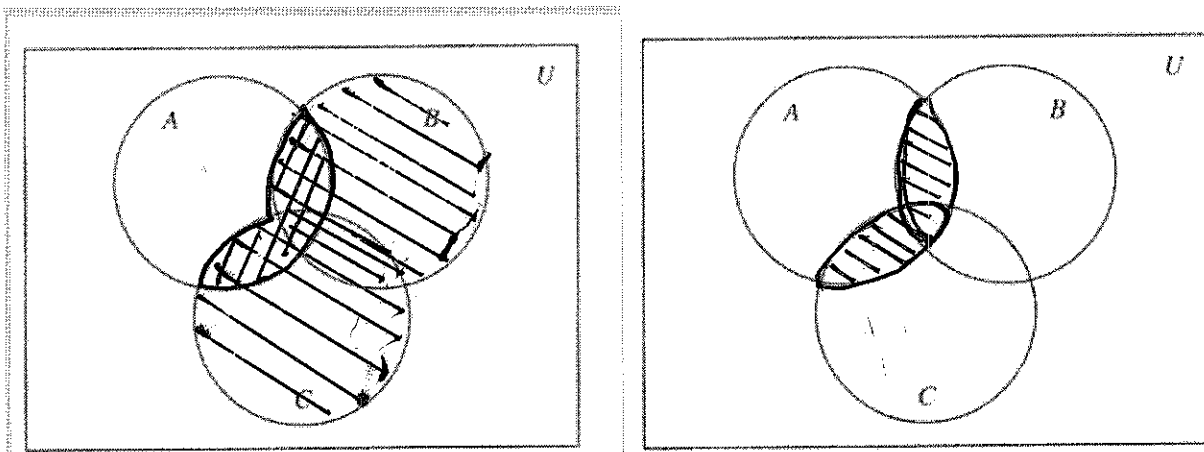
Si x no está en A , x está en el complemento de A .

Si x no está en B , está en el complemento de B .

Por lo tanto x pertenece al complemento de A ó al complemento de B .

$$x \in A^c \cup B^c$$

4. Demuestre mediante un diagrama de Venn que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (4 pts.)



5. Un lote de estacionamiento tiene 31 espacios para visitantes, enumerados desde el 0 hasta el 30. A los visitantes se les asigna el espacio de estacionamiento usando la función "hashing" $h(k) = k \bmod 31$, donde k es el número formado de los primeros

Segundo Examen Parcial de Matemática Discreta

Segundo semestre 2011-2012

Versión A

dígitos de la tablilla del auto del visitante. ¿Qué espacio se le asigna por esta función a los autos cuyas tablillas tienen los siguientes números? (7 pts.)

i) $f(317) = 7$

$(317) \div 31 = \text{residuo } 7$

ii) $f(918) = 19$

iii) $f(007) = 7$

iv) $f(100) = 7$

v) $f(310) = 0$

b) De haber colisión, ¿Cómo asignarías estos casos? *Escriba a*
iii y iv al 10,11 si no están ocupados.

6. Determine el tercer y cuarto términos $f(2)$, $f(3)$ de la función definida de manera recursiva por: (2 pts./cu)

i) $f(0) = 0$

ii) $f(1) = 1$

iii) $f(n) = 3[f(n-1) - 2] + f(n-2)$ para $n \geq 2$

$$f(3) = 3[f(1) - 2] + f(0) = 3(1-2) + 0 = -3$$

$$f(4) = 3[f(2) - 2] + f(1) = 3(-3-2) + 1 = -14$$

7. Defina en forma recursiva la siguiente sucesión (4pts.)

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots = \left\{ \frac{2}{3^n} \right\} = \left\{ 2 \cdot \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a_0 = \frac{2}{3}$$

$$a_n = a_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Segundo Examen Parcial de Matemática Discreta

Segundo semestre 2011-2012

Versión A

8. Problemas de Conteo

- a) ¿Cuántos enteros positivos entre 100 y 999 divisibles entre 3 ó 4? (3 pts.)

Multiplos de 3 $102 = 3(34) \dots\dots\dots 999 = 3(333)$
 $333 - 34 + 1 = \underline{300}$

Multiplos de 4 $100 = 4(25) \dots\dots\dots 998 = 4(299)$
 $299 - 25 + 1 = 275$

Multiplos de 12 $108 = 12(9) \dots\dots\dots 996 = 12(83)$
 $83 - 9 + 1 = 75$ $\text{Total: } 300 + 275 - 75 = 500$

- b) ¿Cuántos "bit string" hay de largo 8? (2 pts.)

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$$

- c) ¿Cuántos bit string hay de largo 6 ó menos? (2 pts.)

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

- d) ¿Cuántos "bit string" hay de largo 8 que empiezan y terminan con 1? (3 pts.)

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^6$$

9. Permutaciones

- a) ¿De cuántas maneras podemos sentar 8 personas en una fila?
8!

- b) Dos de las 8 personas son pareja y no quieren que las sienten separadas. ¿De cuantas maneras posibles podemos sentarlas en una fila? (2 pts.)
7!

- c) ¿De cuántas maneras podemos sentar 8 personas en una mesa redonda? (2 pts.)
7!

Segundo Examen Parcial de Matemática Discreta

Segundo semestre 2011-2012

Versión A

d) Dos de 8 personas son pareja y no quieren que las sienten separadas. ¿De cuantas maneras posibles podemos sentarlas en una mesa redonda? (3 pts.) 6!

e) Si solo hay 3 sillas en una fila, ¿de cuantas maneras podemos sentar a 7 personas si el orden en que las sentamos importa?(2 pts.)

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!}$$

10. Encripte el siguiente mensaje: El "cipher" que usted utilizará para hacer el encripto es $f(p) = (2p + 5) \text{ mod } 26$. (8 pts.)

Mensaje: POR TODO DAD GRACIAS

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|--|----|----|---|----|--|---|---|---|--|
| P | O | R | | T | O | D | O | | D | A | D | |
| 15 | 14 | 17 | | 19 | 14 | 3 | 14 | | 3 | 0 | 3 | |
| 9 | | | | | | | | | | | | |
| j | k | n | | r | k | L | k | | L | f | L | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| G | R | A | C | I | A | S |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| U | V | W | X | Y | Z | | | | |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | |