Introducción a Pruebas: Capítulo 4.1 Epps

I. Definiciones:

- Teorema: Una oración que se puede probar que es cierta.
- Proposiciones: teoremas menos importantes.
- Se demuestra que un teorema es cierto mediante una prueba. Una prueba es un argumento válido que demuestra que un teorema es cierto.
- Lemma: Un teorema menos importante que ayuda en la prueba de otros teoremas.
- Corolario: Un teorema que se puede establecer directamente de un teorema que ya fue probado.
- Conjetura: una oración que ha sido propuesta como una oración cierta usualmente en las base de alguna evidencia parcial, un argumento heurístico ó la intuición de un experto.

II. Teoría:

1) (i) A = A, (ii) Si A = B, entonces B =A, y (iii) Si A= B, B = C, entonces A = C.
2) No hay enteros entre 0 y 1.
3) El conjunto de los enteros es cerrado bajo la operación de suma, resta y producto. ↔
4) El cociente de dos enteros no siempre es entero. Ejemplo: 3/2, 3/0 (no está definido).
5) Definición:

   n es par ↔ existe un entero k tal que n = 2k.
   n es impar ↔ existe un entero k tal que n = 2k + 1.

6) Definición:

   n es primo ↔ V entero positivo r y s, si n = rs entonces r = 1 y s = n ó r =n y s =1.
   N es compuesto ↔ existen enteros positivos r y s tal que n = rs y 1< r < n y 1 < s < n

Ejercicio#1:

a) Si a y b son enteros , es 10 a + 8b + 1 impar**?**

b) Si a y b son enteros, es $6a^2b$ par?

c) Escribe los primeros 6 números primos.

III. Diferentes tipos de pruebas:

1. Pruebas de proposiciones existenciales.
   a. Hallando un elemento x para el cual la proposición sea cierta.
2. Desaprobando proposiciones universales por contraejemplo
   a. Hallando un elemento x para el cual la proposición sea falsa.
3. Probando proposiciones universales:
   a. **Prueba directa**: $p \to q$. Se presume que p es cierta y se sigue demostrando hasta llegar que q es cierta. Empiezan con la premisa, continua con una sucesión de deducciones y al final se prueba q.
   b. **Método exhaustivo**:Se prueba con cada elemento dentro del dominio de la proposición.

Ejemplo #1:

a. Existe un entero x que puede ser escrito de dos maneras como la suma de dos números primos. Ej. 8 = 4 + 4 ; 8 = 5 + 3
b. Para toda n perteneciente a los enteros pares y 5 < n < 19, entonces n puede ser escrito como la suma de dos enteros primos.

6 = 3 + 3	16 = 11 + 5
8 = 3 + 5	18 = 11 + 7
10 = 5 + 5	
12 = 7 + 5	
14 = 7 + 7	

c. Para todo número real a y b, si $a^2 = b^2$ entonces a =b. Falso porque $(2)^2 = (-2)^2$ y $2 \neq -2$.

d. La suma de dos números pares es par.
   Prueba:
   Supongamos que m y n son dos números enteros seleccionados arbitrariamente. Debemos demostrar que su suma es par. Por definición de par tenemos que m = 2r y n = 2s para algún entero r y s. Entonces:

$$\begin{aligned} m + n &= 2r + 2s \quad \text{por sustitución} \\ &= 2(r + s) \quad \text{por factorización} \end{aligned}$$

Sea t = r + s. Note que t es entero porque la suma de enteros es cerrada. Entonces m + n = 2t donde t es entero. Entonces por definición de par m + n es par. QDP.

IV. Instrucciones para hacer pruebas de proposiciones universales:

1. Copie la oración del teorema que va a probar en su papel.
2. Marque claramente el inicio de la prueba con la palabra Prueba.
3. Haga su prueba sustanciosa. Explique el significado d elas variables.
4. Escriba la prueba en oraciones completas y correctas.
5. Mantenga al lector informado de cada paso en la prueba.
6. De una razón de cada aseveración que hace.
7. Incluya las frases y pequeñas palabras que hacen lógica su argumento.
8. Despliegue ecuaciones ó inecuaciones.

V. Errores comunes:

1. Tratar de hacer la prueba con ejemplos.
2. Usar la misma letra para diferentes cosas.
3. Saltar inmediatamente a la conclusión.
4. Dar vueltas.
5. Confusión entre lo que se sabe y lo que no se sabe.
6. Mal uso de la palabra *si*.

Ejemplo #2: Demuestre que la siguiente proposición es falsa.
Existe un entero positivo tal que $n^2 + 3n + 2$ es primo.
La negación de esta proposición es:
Para todo número entero positivo $n^2 + 3n + 2$ no es primo.
Prueba:
Supongamos que n es un número entero seleccionado arbitrariamente. Debemos demostrar que $n^2 + 3n + 2$ no es primo. Podemos factorizar a $n^2 + 3n + 2$ en $(n+1)(n+2)$. Podemos observar que $n+1$ y $n+2$ también son enteros. (Son la suma de enteros) y ambos son mayores de 1; $n+1 > 1$ y $n+2 > 1$. Por lo tanto $n^2 + 3n + 2$ es el producto de dos enteros mayores de 1, entonces por definición de número primo no es primo.