

Matemática Discreta: Lógica de Predicados y Cuantificadores Universales

Conferencia #4

Relevancia: La lógica de predicados es utilizada para expresar el significado de un amplio alcance de proposiciones en matemáticas y ciencias de cómputos. de manera que nos permite razonar y explorar relaciones entre los objetos.

I. Predicados: Es una propiedad ó característica del sujeto.

$P(x)$: se llama la función proposicional P de x .

Ejemplo # 1: " $x > 3$ ", " $x = y + z$ ", "computadora x está bajo el ataque de un intruso", estudiante x no está atendiendo a la clase".

Estos predicados no tienen valor de verdad si no se especifica valores a la variable.

Ejemplo # 2. Dado los siguientes predicados, ¿qué valores de las variables los hacen ciertos?

a) $P(x): x > 3$. ¿Cuál es el valor de verdad de $P(4)$ y $P(2)$?

b) $Q(x, y): X = y + 3$. ¿Cuál es el valor de verdad de $Q(1, 2)$, $Q(3, 0)$ y $Q(2, 1)$?

c) $R(x, y, z): X + y = z$. ¿Cuál es el valor de verdad de $R(1, 2, 3)$ y

$R(0, 0, 0)$?

II. Cuantificadores Universales:

1. Las palabras *todo*, *cada uno*, *todos* y *ninguno* se denominan cuantificadores universales.

2. Las palabras *hay* y *al menos uno* se conocen como cuantificadores existenciales.

3. Los cuantificadores son muy usados en matemáticas para indicar cuantos casos existen de una situación determinada. Su valor de verdad depende del dominio de la variable.

Matemática Discreta: Lógica de Predicados y Cuantificadores Universales

Conferencia #4

Ejemplo #3:

Mencione el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

1. Todas las personas no tienen el tiempo para dedicarlo al mantenimiento de sus autos. (Falso, algunas personas)
2. Todo número natural es un entero. (Cierto)
3. Todos los números primos son impares. (Falso, 2 no es impar pero es primo)
4. Todos los números impares son primos. (Falso, 15, 21, 25 son impares pero no son primos)
5. Algunos números racionales son enteros. (Cierto)

Cuantificador universal: $\forall xP(x)$. Quiere decir: "P(x) para todos los valores de x en el dominio.

Contraejemplo de una proposición con cuantificador: un elemento para el cual P(x) es falso.

Ejemplo # 4

Diga si las siguientes proposiciones son ciertas para el dominio especificado. (Si no se especifica entonces el dominio es todo número entero)

- a) $x + 1 > x$ para toda x real. ($\forall x P(x)$) (Cierto)
- b) " $x < 2$ ", $\forall x P(x)$. No es cierto para toda x.
- c) $\forall x (x > 0 \vee x < 0)$. (No es cierta para $x = 0$)
- d) $\forall x (x^2 \geq x)$. No es cierto para toda x.

Debe usarse el método de los interceptos que se explica en precálculo.

$x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0$. Repaso de este método:

Divide la recta en tres intervalos:

Matemática Discreta: Lógica de Predicados y Cuantificadores Universales

Conferencia #4

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

Debes hacer pruebas en cada uno de ellos hasta hallar él o los intervalos para los cuales la oración es cierta.

Para que la proposición cierta restringimos su dominio para $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

Cuantificador existencial: Existe un elemento x en el dominio tal que $P(x)$.

$\exists xP(x)$ Existe por lo menos uno, hay un x tal que $P(x)$

Existe un x tal que $p(x)$. Existe por lo menos un x tal que $p(x)$.

Se debe especificar un dominio cuando se usa esta proposición. Su significado cambia si el dominio cambia. Si no se especifica un dominio no tiene sentido esta proposición.

Ejemplo # 5: Mencione si son ciertas o falsas las siguientes proposiciones: (Si no se especifica entonces el dominio es todo número entero)

- a) " $x > 3$ " $\exists xP(x)$ (cierta)
- b) " $x = x + 1$ " $\exists xP(x)$ (falso)
- c) " $x^2 > 10$ " $\exists xP(x)$ dominio = { 1, 2, 3, 4} (4 la hace cierta)
- d) $\exists x(x^2 = 2)$

Ejemplo # 6: Llene la Tabla de valor de verdad el predicado $Q(x): x + 1 > 2x$. El dominio son los números enteros.

	Q(x): $x + 1 > 2x$
Q (0)	$1 > 2$ C
Q (-1)	$0 > -2$ C
Q (1)	$2 > 2$ F
Q (2)	$3 > 4$ F
$\exists xQ(x)$	C
$\forall xQ(x)$	F
$\exists x \sim Q(x)$	C
$\forall x \sim Q(x)$	F

Matemática Discreta: Lógica de Predicados y Cuantificadores Universales

Conferencia #4

IV. Leyes de Morgan para Cuantificadores.

- a) La negación de que $P(x)$ es cierta para todo número real es *que existe un número x para el cual $P(x)$ es falsa.*
- b) La negación de que $P(x)$ es cierta para por lo menos una x es *para toda x , $P(x)$ es falsa.*

Ejemplo #7: Negación de las siguientes proposiciones:

1. Para el conjunto de todos los números primos por lo menos un número primo es par. (cierta)

Negación: Para el conjunto de los números primos, todos son números impares. (falso)

2. Para todos dos números enteros positivos, su suma es 12. (falso)

Negación: Para todo número entero, existe por lo menos una pareja cuya suma es no es igual a 12. (cierta)

Ejemplo # 8: Expresar las proposiciones siguientes utilizando cuantificadores y predicados. Traduzca las proposiciones a símbolos.

- a. Todo estudiante en esta clase ha estudiado pre cálculo.

Para todo estudiante x en esta clase, x ha estudiado pre cálculo.

$\forall x P(x)$; donde $P(x) = \text{ha tomado precálculo}$.

- b. Algún estudiante en esta clase ha visitado Méjico.

Hay un estudiante en esta clase que ha visitado Méjico.

Hay un estudiante x en esta clase tal que x ha visitado Méjico.

$\exists x V(x)$; donde $V(x) = \text{ha visitado a Méjico}$.

- c. Todos los estudiantes de la clase tomaron el curso de Java.

Para todo estudiante x de la clase, x ha tomado el curso de Java.

$\forall x J(x)$; donde $J(x) = \text{ha tomado el curso de Java}$.

Matemática Discreta: Lógica de Predicados y Cuantificadores Universales

Conferencia #4

d. Todos los estudiantes de la clase son varones.

Para todo estudiante x de la clase, x es varón.

Si $Q(x)$: x es varón entonces se escribe en símbolos: $\forall xQ(x)$.

Si $Q(\text{Adela})$ la proposición es falsa, por otro lado $Q(\text{Efraín})$ es cierta si es que existe Efraín en la clase.

Ejercicio # 1: Seleccione un dominio para el cual la proposición es cierta y un dominio para el cual es falsa.

1. Todo el mundo habla japonés.

Algunas personas hablan japonés. (Cierta)

2. Hay alguien mayor de 21 años en el salón de clases.

3. $2x + 1 < 0$. Cierta para $x < -\frac{1}{2}$, Falsa para $x > \text{ó} = -\frac{1}{2}$.

4. Alguien sabe mucho más matemática discreta que los demás. (El grupo de estudiantes que obtenga A)

5. $X^3 > 0$. Cierta para toda $x > 0$. Falsa si $x < = 0$.

6. $X^2 - 4x > 0$. Cierta para $x < 0$ ó $x > 4$.

Ejercicio #2

En el dominio de todas las películas, sea $R(x)$ el predicado " x es romántica".

Expresa las siguientes proposiciones utilizando predicados y cuantificadores.

1) Algunas películas son románticas. $\exists xR(x)$.

2) Algunas películas no son románticas. $\exists x\sim R(x)$.

3) Ninguna película es romántica. Es equivalente a decir que Todas las películas no son románticas. $\forall x\sim R(x)$.

4) Todas las películas son románticas. $\forall xR(x)$

Matemática Discreta: Lógica de Predicados y Cuantificadores Universales

Conferencia #4

Ejercicio #3: En el dominio de todos los libros, considere los siguientes

predicados: $P(x)$ = es pesado $C(x)$ = ese confuso

a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow C(x))$: Si todos los libros son pesados entonces son confusos.

b) $(\exists x)(C(x) \wedge P(x))$: **Algunos libros son confusos y pesados.**

c) $(\forall x)(C(x) \vee P(x))$: **Todos los libros son confusos ó pesados.**

d) $(\exists x)(P(x) \wedge \sim C(x))$: **Existe un libro pesado que no es confuso.**

Ejercicio #4. Escriba la negación de todas las proposiciones del ejercicio #3 y

transcriba esta negación en símbolos.

Negación 1) Algunos libros son pesados y no son confusos.

Símbolos: $(\exists x)(P(x) \wedge \sim C(x))$

Negación #2) Todos los libros no son confusos ó son pesados.

$\forall x((\sim C(x) \vee P(x)))$

Negación #3) Hay un libro que no es pesado y no es confuso.

$\exists x(\sim P(x) \wedge \sim C(x))$

Negación #4) Todos los libros no son pesados ó todos los libros no son

confusos. $\forall x(\sim P(x) \vee \sim C(x))$